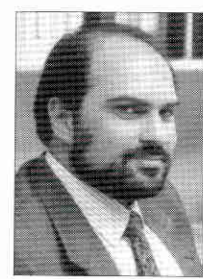


JULIAN CARLOS OLIVER RABOSO  
Actuario de Seguros La Equitativa



# Conmutación de Tablas Actuariales sobre varias cabezas

**L**a práctica actuarial de cálculo de operaciones que requieren tablas de mortalidad o invalidez está basada tradicionalmente en la obtención de símbolos de conmutación de la probabilidad  $q_x$  de salida del colectivo en función del tipo de interés técnico.

El cálculo de los símbolos de conmutación para una cabeza de edad  $x$  viene dado por las expresiones siguientes:

$$D_x = l_x \cdot (1+i)^{-x}; C_x = d_x \cdot (1+i)^{-(x+1/2)}$$

Los símbolos de conmutación sobre dos cabezas de igual edad se obtienen a partir de los símbolos anteriores sobre una cabeza efectuando las siguientes operaciones:

$$D_{xx} = l_x \cdot D_x; C_{xx} = D_{xx} \cdot (1+i)^{-1/2} = D_{x+x+1/2} \cdot (1+i)^{-1/2} \quad (R)$$

La obtención de los símbolos sobre tres cabezas de igual edad requiere a su vez el conocimiento de los símbolos calculados sobre dos cabezas:

$$D_{xxx} = l_x \cdot D_{xx}; C_{xxx} = D_{xxx} \cdot (1+i)^{-1/2} = D_{x+x+x+1/2} \cdot (1+i)^{-1/2}$$

La obtención de los símbolos conmutados sobre  $m$  cabezas de igual edad requiere, según el planteamiento recurrente anterior,  $m$  conmutaciones sucesivas que representan una dificultad operativa y un consumo elevado de tiempo de cálculo.

El objeto del breve desarrollo inductivo que viene a continuación es mostrar una simplificación operativa que aporta a su vez una interpretación más evidente de los símbolos de conmutación sobre varias cabezas.

Sea el caso general dado por las expresiones siguientes:

$$D_{x:\overline{m}|} = l_x \cdot D_{x:\overline{m-1}|}; C_{x:\overline{m}|} = D_{x:\overline{m}|} \cdot (1+i)^{-1/2} = D_{x+\overline{m-1}|} \cdot (1+i)^{-1/2}$$

Simplificando la primera expresión obtenemos:

$$D_{x:\overline{m}|} = l_x \cdot D_{x:\overline{m-1}|} = l_x^m \cdot (1+i)^{-x}$$

que aplicada a la segunda permite obtener:

$$C_{x:\overline{m}|} = l_x^m \cdot (1+i)^{-x} \cdot (1+i)^{-1/2} = l_{x+1}^m \cdot (1+i)^{-x-1/2}$$

expresión de la cual extraemos factor común resultando:

$$C_{x:\overline{m}|} = (l_x^m - l_{x+1}^m) \cdot (1+i)^{-x-1/2}$$

Siendo las operaciones **(R)** expresiones recurrentes, los símbolos  $D$  y  $C$  han sido obtenidos por inducción y sólo queda probar su validez para  $m = 1$ .

$$D_x = l_x \cdot (1+i)^{-x}; C_x = (l_x - l_{x+1}) \cdot (1+i)^{-x-1/2} = d_x \cdot (1+i)^{-x-1/2}$$

Las expresiones

$$D_{x:\overline{m}|} = l_x^m \cdot (1+i)^{-x}; C_{x:\overline{m}|} = (l_x^m - l_{x+1}^m) \cdot (1+i)^{-x-1/2}$$

permiten efectuar una conmutación directa de las tablas de mortalidad evitando  $m-1$  conmutaciones previas y reduciendo el tiempo de cálculo.

A su vez, estas expresiones evidencian un significado fundamental de los propios símbolos:

para el caso de vida:

$${}_n E_x = \frac{D_{x+n:\overline{m}|}}{D_{x:\overline{m}|}} = \frac{l_{x+n}^m}{l_x^m} \cdot (1+i)^{-n}$$

$${}_n E_x = p_x^m \cdot (1+i)^{-n}$$

siendo el primer factor la probabilidad de que  $m$  cabezas de igual edad  $x$  vivan al término de  $n$  años.

El capital diferido es pues pagadero al término del contrato si las  $m$  cabezas viven en ese momento y su prima única es el capital probable descontado financieramente, siendo la probabilidad de ocurrencia del evento:

$$\frac{l_{x+n}^m}{l_x^m} = ({}_n p_x)^m$$

que es la probabilidad de que vivan exactamente  $m$  cabezas.

para el caso de muerte:

$$A_{x:\overline{m}|} = \frac{C_{x:\overline{m}|}}{D_{x:\overline{m}|}} = \frac{(l_x^m - l_{x+1}^m)}{l_x^m} \cdot (1+i)^{-1/2}$$

El seguro temporal es pagadero si fallece al menos una de las  $m$  cabezas durante la vigencia del contrato. Suponiendo, como es habitual, la ocurrencia de los siniestros uniformemente distribuidos a lo largo de la duración, la prima única es el capital probable descontado financieramente, siendo la probabilidad de ocurrencia del evento:

$$\frac{(l_x^m - l_{x+1}^m)}{l_x^m} = 1 - ({}_1 p_x)^m$$

que es la probabilidad de que no todas las  $m$  cabezas vivan un año más o, lo que es igual, la probabilidad de que fallezca al menos una cabeza. ■