JESUS VEGAS ASENSIO
Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid

EL RIESGO ACTUARIAL

Operaciones de seguro de vida

VAMOS a distinguir a este respecto los siguientes conceptos:

a) Riesgo actuarial en sentido amplio, derivado de la presencia de alguno de los tres elementos de carácter aleatorio de las operaciones de seguro: si acaece o no el siniestro; el importe del mismo y la fecha de su ocurrencia (elemento temporal).

b) Riesgo actuarial en sentido estricto, asociado a la dispersión (en lo que sigue tomaremos la varianza como medida de dispersión) de la variable aleatoria correspondiente a la diferencia entre los valores actuales de las prestaciones y aportaciones que definen el proceso financiero-estocástico que modeliza una determinada operación de seguro.

Para cuantificar el riesgo actuarial en su segunda acepción, vamos a hacer uso de lo que denominamos «fórmulas de Gram», recordando brevemente las principales aportaciones de este autor a la Ciencia Actuarial.

APORTACIONES DE J. P. GRAM

RECORDEMOS en primer término los conocidos desarrollos de Gram-Charlier, que tantas aplicaciones tienen en los campos estadísticos y actuariales.

Sabemos que si ζ es una variable aleatoria normal (0,1), su función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2}$$

tiene infinitas derivadas sucesivas, las cuales, al igual que f(x), tienden a cero cuando $|x| \to \infty$. Estas derivadas presentan la relación:

$$\frac{d^r f}{dx^r} = (-1)^r \cdot H_r(x) \cdot f(x)$$

en donde las expresiones $H_r(x)$ son los polinomios de Hermite, que tienen la forma siguiente:

$$H_0=1 \quad H_2=x^2-1 \quad H_4=x^4-6x^2+3$$
$$H_1=x \quad H_3=x^3-3x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Como se observa fácilmente, estos polinomios cumplen la condición:

$$\frac{dH_s}{dx} = s \cdot H_{s-1} \quad \forall_s = 1, 2, 3, \ldots$$

Una importante propiedad de estos polinomios, por los que se les conoce también como «polinomios ortogonales», es la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_r(x) \cdot H_s(x) \cdot f(x)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } r \neq s \\ r! \text{ si } r = s \end{cases}$$

Supongamos ahora que $\varphi(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria η de media 0 y desviación típica 1 y que dicha función es desarrollable en series de derivadas sucesivas de la función f(x) =

$$\varphi(x) = a_0 f(x) + a_1 f^{(1}(x) + a_2 f^{(2}(x) + a_3 f^{(3}(x) + \ldots$$

Podemos obtener los coeficientes a_i multiplicando ambos miembros por H_s e integrando. Si aplicamos las ecuaciones anteriores resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_s\, \varphi(x)dx = (-1)^s \cdot s! \cdot a_s$$

De aquí obtenemos que:

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = 0$
$a_3 = -\lambda_1/_6$
$a_4 = \lambda_2/_{24}$

siendo λ_1 y λ_2 los coeficientes de asimetría y de curtosis.

En consecuencia, el resultado obtenido o desarrollado de Gram-Charlier es:

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{\lambda_1}{6} f^{(3}(x)+\frac{\lambda_2}{24} f^{(4}(x)\ldots$$

Una importante aplicación de este desarrollo en la Matemática Actuarial surge al considerar $\varphi(x)$ como la función de densidad de la variable ti-

pificada de la variante siniestralidad total de una cartera de seguros en el período (0,t).

Una segunda aportación importante de Gram a los procesos de ajuste es la siguiente:

Sea un conjunto $\{Y_t;\ t = 1, 2, \ldots, N\}$ de estimadores de una secuencia de parámetros $\{\theta_t\}$, y se trata de ajustar un polinomio

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(t)x^i$$

a

$\{Y_{t+x};\ x = -n, -n+1, \ldots, n\}$ para $n < t \leqslant N-n$

utilizando el criterio de hacer mínima la expresión

$$\sum_{x=-n}^{n} \{Y_{t+x} - \sum_{i=0}^{m} a_i(t)x^i\}^2$$

Con respecto a los coeficientes $\{a_i(t)\}$

El valor resultante de $a_0(t)$ es:

$$\hat{a}_0(t) = \sum_{x=-n}^{n} r_x(m,n)\ Y_{t+x}$$

donde los coeficientes $\{r_x(m,n)\}$ dependen sólo de x, m y n. Por ejemplo, si queremos obtener un polinomio de tercer grado, resulta (m=3)=

$$r_x(3,n) = \frac{3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\{(3n^2+3n-1)-5x^2\}$$

Bajo ciertas condiciones, $\hat{a}_0(t)$ es mejor estimador que Y_t respecto al parámetro θ_t.

Los trabajos de Gram comprenden la descripción de un método general de obtención de los coeficientes $r_x(m,n)$.

Sin embargo, su más importante aportación a la Matemática del Seguro de Vida son las que vamos de denominar «fórmulas de Gram», cuya idea básica es la siguiente:

Sea T una variable aleatoria positiva y asociamos el pago de una unidad monetaria al instante T. El valor actual o descontado de este pago unitario es la nueva variable aleatoria V^T, donde

$$V = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$$

es el factor de descuento anual, i el tipo de interés y $\delta = \log(1+i)$.

Supuesto que $\delta > 0$ y que existe el momento de primer orden de V^T, resulta:

$$E[V^T] = A(\delta)$$

o bien, en notación actuarial clásica

$$E[V^T] = \bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

si T = mín. (r,n), siendo «r» el tiempo restante de vida de una persona cuya edad es x y n la duración de la operación.

Entonces, la varianza de la variante V^T también existe y tiene por expresión:

$$\sigma^2[V^T] = E[V^T]^2 - (E(V^T))^2 = E[e^{-\delta T}]^2 - [A(\delta)]^2 = E[e^{-2\delta T}] - A^2(\delta) = A(2\delta) - A^2(\delta) \quad [1]$$

la media $E[V^T]$ se denomina *valor actuarial* del capital unitario pagadero en T, pero la varianza de V^T no tiene una denominación similar. Este parámetro sirve como medida del riesgo actuarial en sentido estricto, de mortalidad, o técnico, inherente a esta operación de seguro, riesgo que, en general, recoge las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad con respecto a su valor medio.

DETERMINACION DEL RIESGO ACTUARIAL EN SENTIDO ESTRICTO

EXPRESIONES del tipo de la ecuación [1] permiten cuantificar el riesgo actuarial en sentido estricto de las operaciones de seguro de vida. En efecto, sea T = T(x) el tiempo transcurrido desde la fecha de efecto de la póliza hasta el fallecimiento del asegurado cuya edad inicial es (x). El valor actual de las prestaciones reconocidas a favor del asegurado (o beneficiario) es $\zeta = b_T V_T$, en donde b_T es la variable aleatoria que recoge las prestaciones que figuran en póliza y V_T una ley financiera de descuento.

Por ejemplo, en un *Seguro Vida Entera* de capital asegurado unitario, queda:

$b_t = 1 \qquad t \geqslant 0$
$\zeta = V^T \qquad T \geqslant 0$
$V_t = V^t \qquad t \geqslant 0$

La prima pura única es:

$$\pi = E(\zeta) = E[V^T] = \int_0^\infty V^t\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}dt = \bar{A}_x$$

Y la varianza o riesgo actuarial en sentido estricto, teniendo en cuenta la [1], resulta:

$$\sigma^2(\zeta) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

donde ${}^2\bar{A}_x$ es la prima única de un Seguro Vida Entera unitario valorado a una fuerza de interés 2δ.

En el caso de una operación de *renta inmediata,* definimos el valor actual actuarial de una renta vitalicia, unitaria y continua a la edad (x) como,

$$\bar{a}_x = E[\bar{a}_{\overline{T}|}] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\, {}_tP_x \cdot \mu_{x+t}\, dt$$

expresión equivalente a la definición clásica

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_x\, dt$$

Como, a su vez, la prima única del Seguro Vida entera es,

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

se obtiene, como es bien conocido, la relación

$$\bar{A}_x + \delta\bar{a}_x = 1$$

Para calcular la varianza de $\bar{a}_{\overline{T}|}$, sabemos que

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - V^T}{\delta} = \frac{1-\zeta}{\delta}$$

de donde

$$\bar{a}_x = E[\bar{a}_{\overline{T}|}] = E\left(\frac{1-\zeta}{\delta}\right) = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}$$

Entonces, la varianza queda

$$\sigma^2(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \sigma^2\left[\frac{1-V^T}{\delta}\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\,\sigma^2(V^T) = \frac{1}{\delta^2}\,\sigma^2(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\,\{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\}$$

expresión que traducida al campo discreto resulta:

$$\frac{1}{d^2}\,[{}^2A_x - (A_x)^2]$$

con $d = i\cdot v$

En la combinación de las dos operaciones anteriores (*Vida Entera Unitaria y renta vitalicia inmediata*), si el término de la renta es δ, nos resultan los parámetros:

$E[\delta\bar{a}_T + V^T] = \delta\cdot\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$

$\sigma^2[\delta\bar{a}_T + V^T] = 0$

es decir, no existe riesgo actuarial en sentido estricto en una operación que combine una Vida Entera de capital unitario y una renta vitalicia inmediata cuyo término constante sea δ o fuerza de interés técnico. Sin embargo, sí existe riesgo actuarial en sentido amplio, asociado, en este caso, a la incertidumbre en la fecha de devengo del capital asegurado unitario o fecha de fallecimiento del asegurado.

La existencia de un solo elemento de carácter aleatorio no es, por otra parte, infrecuente en las operaciones de seguro de vida. Así, en el seguro diferido puro la única incertidumbre radica en si se presenta o no el siniestro, ya que la cuantía del mismo y la fecha de su ocurrencia están aquí predeterminados si el siniestro ocurre.

Finalmente, podemos generalizar las que hemos llamado fórmulas de Gram al supuesto de primas periódicas.

En efecto, sea L la variante asociada a la diferencia entre el valor actual de las prestaciones y el valor actual de las primas puras correspondientes a una determinada operación de seguro de vida.

El principio de equivalencia estática supone la condición

E (L) = 0

lo cual implica la importante propiedad

$\sigma^2(L) = E(L^2)$

Consideremos como caso particular el *Seguro Vida Entera a primas vitalicias,* por lo que la variante L será igual a $V^T - \bar{p}\cdot\bar{a}_{\overline{T}|}$. La ecuación de equivalencia estática resulta,

$E(L) = E(V^T) - \bar{p}\cdot E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \bar{A}_x - \bar{p}\cdot\bar{a}_x = 0$

es decir,

$$\bar{p} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$$

y el riesgo en sentido estricto es:

$$\sigma^2(L) = \sigma^2[V^T - \bar{p}\cdot\bar{a}_{\overline{T}|}] =$$

$$= \sigma^2\left[V^T - \frac{\bar{p}\cdot(1-V^T)}{\delta}\right]$$

$$= \sigma^2\left[V^T\left(1+\frac{\bar{p}}{\delta}\right) - \frac{\bar{p}}{\delta}\right] =$$

$$= \sigma^2\left[V^T\left(1+\frac{\bar{p}}{\delta}\right)\right] = \left(1+\frac{\bar{p}}{\delta}\right)^2\sigma^2(V^T)$$

$$= \left(1+\frac{\bar{p}}{\delta}\right)^2\left({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2\right)$$

de donde se obtiene

$$\sigma^2(L) = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{(\delta\bar{a}_x)^2}$$

Una de las principales aplicaciones que tiene la evaluación del riesgo actuarial en la forma que acabamos de ver es en el análisis de la solvencia del ente asegurador derivada de las operaciones de seguro de vida. ■

JESUS VEGAS ASENSIO

— Catedrático de Matemática Actuarial de la Universidad Complutense de Madrid.
— Miembro titular del IAE.
— Miembro de número de la Asociación Actuarial Internacional y de la Asociación Internacional para el estudio de la Economía del Seguro (Asociación de Ginebra).
— Pertenece al Grupo Consultivo de Asociaciones de Actuarios de la Comunidad Europea.
— Ex presidente de la Sección Científica del Instituto de Actuarios Españoles.
— Autor de numerosas publicaciones sobre temas actuariales.