CÁLCULO EMPÍRICO BASADO EN LA TEORÍA DE CÓPULAS DE LA PRIMA DE UN INDUSTRY LOSS WARRANTY

Mª Victoria Rivas López[1], María José Pérez Fructuoso[2], Alfredo Cuesta Infante[3]

RESUMEN:

Los Industry Loss Warranties son productos de transferencia alternativa de riesgos, cuyos pagos están condicionados a un índice de pérdidas por catástrofes de la industria aseguradora. En este artículo se realiza un análisis de dichos instrumentos así como una aplicación de la teoría de Cópulas para fijar su precio empíricamente. Para ello, se desarrolla un toolbox en Matlab que permite elegir las cópulas y las distribuciones marginales que mejor caracterizan un par de vectores de datos correlacionados.

Palabras Clave: Original Loss Warranties, Dependencia de riesgos, Cópulas Arquimedianas, Coeficiente de correlación de Kendall, Simulación de MonteCarlo, MatLab.

[1]*Profesora de Matemáticas de las Operaciones Financieras.* Centro de Estudios Superiores FELIPE II (U.C.M.) C/ Lucas Jordán, s/n. 28300, Aranjuez, Madrid. Teléfono: +34 91.809.92.00 etx. 316 Fax: +34 91.809.92.10 e-mail: mvrivas@cesfelipesegundo.com

[2]*Profesor Visitante de Matemática Actuarial.* Departamento de Economía de la Empresa. Universidad Carlos III de Madrid Avenida de la Universidad Carlos III, 22. 28270, Colmenarejo, Madrid. Teléfono: +34 91 856 13 08 Fax: +34 91 856 12 20 e-mail: mjperez@emp.uc3m.es

[3]*Profesor de Fundamentos de Computadores*. Centro de Estudios Superiores Felipe II (U.C.M.) C/ Lucas Jordán, s/n. 28300, Aranjuez, Madrid. Teléfono: + 34 91.809.92.00 ext. 251 Fax: + 34 91.809.92.05 e-mail: acuesta@cesfelipesegundo.com

1. Introducción

Los días en que los aseguradores y reaseguradores operaban en entornos estables y poco competitivos, pertenecen al pasado. La desregulación y liberalización, la globalización y la maximización de la participación residual del accionista, se están convirtiendo en conceptos comunes cuya consecuencia es un incremento de la competitividad en los precios. En este contexto, surge la convergencia de los mercados asegurador y de capitales, ofreciendo una fuente adicional de capacidad y financiación, que complementa a los productos de reaseguro tradicional.

En este contexto internacional se crea un nuevo mapa de riesgos, en el que las primeras posiciones están ocupadas por el terrorismo a nivel internacional (por efecto de la globalización), el riesgos medioambiental, la responsabilidad civil en tema de reclamaciones y evidentemente las catástrofes naturales. Dentro de este marco, y especialmente en lo referente a los riesgos no-asegurables como el de terrorismo o el catastrófico, ningún asegurador ha podido ofrecer una respuesta adecuada de cobertura, lo que ha provocado el desarrollo y perfeccionamiento de instrumentos de transferencia y financiación alternativos así como en la elaboración de métodos fiables de cuantificación para evaluarlos. Algunos de estos instrumentos son todos los derivados de la titulización del riesgo catastrófico, como los CAT Bonds, las estructuras de capital contingente o los Industry Loss Warranties, que además de mostrar la interconexión entre los mercados financiero y asegurador, incrementan la capacidad de suscripción e introducen el aspecto financiero, dando cobertura no sólo a riesgos puros del seguro sino también a riesgos tradicionalmente financieros como los de tipo de interés, de tipo de cambio o el riesgo de crédito.

Los Industry Loss Warranties son productos de reaseguro alternativos, en los que la cobertura depende del valor de un índice de pérdidas de la industria, altamente correlacionado con las pérdidas aseguradas del comprador, lo que simplifica el proceso de reclamaciones y de suscripción, además de eliminar el azar moral incentivando a los inversores de los mercados de capital a participar en ellos (Doherty et al., 2002). Además, proporcionan una alternativa viable al reaseguro tradicional y a los bonos de catástrofes a través de la mitigación de las pérdidas asociadas a grandes eventos naturales, lo que deriva en un creciente interés por estos productos y por su mercado en los últimos años (Pérez-Fructuoso, 2006).

Tradicionalmente, el cálculo del precio de un producto de seguro o reaseguro, se realiza distribuyendo los riesgos entre toda la masa asegurada y considerando que dichos riesgos son independientes y tienen la misma distribución de probabilidad. De esta forma, los errores, en media, se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total o prima pura es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Pero en determinados casos, especialmente en aquellos referidos a la cobertura del riesgo catastrófico, natural o antropógeno, incrementa la complejidad del entorno al establecerse relaciones de dependencia que pueden llevar a resultados erróneos si se utilizan los métodos tradicionales de tarificación haciendo peligrar la solvencia de una compañía aseguradora. Aplicar la teoría de cópulas al sector asegurador se fundamenta precisamente en la ocurrencia de sucesos relacionados que pueden afectar a varios ramos de negocio al mismo tiempo. Esta teoría analiza el comportamiento de las variables aleatorias dependientes que intervienen en un determinado fenómeno de la naturaleza determinando determinar la mejor función de distribución del riesgo extraordinario y según esto elegir las mejores distribuciones marginales de cada uno de los riesgos relacionados con el mismo. Este proceso podrá hacerse igualmente de forma inversa.

La implementación práctica de esta teoría se realiza mediante un programa de cálculo desarrollado en MATLAB y denominado ICT (Insurance/Copula Toolbox), que ha permitido elegir la cópula y funciones de distribución más adecuadas a los datos siniestrales así como estimar los parámetros asociados a dichas funciones utilizando el método de máxima verosimilitud (Rivas et al., 2006). La dificultad de conseguir datos reales que muestren la relación adecuada entre las cuantías de siniestros asociados a un mismo riesgo, es elevada. Por tanto, para la obtención de los mismos se ha diseñado un proceso de simulación de datos muéstrales, cercanos a la realidad y que permitan ajustar al máximo el modelo de fijación del precio de los productos ART.

La organización del artículo es la siguiente: en el epígrafe 2 se describen los productos alternativos de cobertura del riesgo catastrófico analizados en el presente trabajo. El tercer epígrafe recoge los conceptos teóricos relacionados con las cópulas, fundamentales para su aplicación al sector asegurador. La sección 4 desarrolla un método para seleccionar la copula óptima y las distribuciones marginales asociadas a unos factores de riesgos dependientes así como el método general para calcular la prima de cualquier producto de seguro tradicional o alternativo. En la sección 5 se presenta un ejemplo de aplicación de la teoría de cópulas en el proceso de fijación de la prima de un Industry Loss Warranty y se analiza el efecto que produce la aplicación de la citada teoría sobre la misma. Finalmente se exponen las conclusiones del citado proceso.

2. Definición de Industry Loss Warranty (ILW)

Los ILW (también conocidos como Original Loss Warranties, OLW) son instrumentos de cobertura que cubren los daños derivados de determinados eventos, normalmente de naturaleza catastrófica, en los que se producen pérdidas aseguradas en el mercado asegurador subyacente por encima de un umbral previamente establecido (Pérez-Fructuoso, 2006). Además, y para que el ILW pueda asimilarse a un contrato de seguro y, por tanto, para que pueda llevarse a cabo la indemnización, el comprador necesita demostrar que ha sufrido unas pérdidas aseguradas propias superiores también a una determinada cuantía, conocida como retención, fijada normalmente en un nivel muy bajo (habitualmente de 10.000 dólares).

Los ILW pueden considerarse contratos de reaseguro cuyo resultado depende de dos tipos de desencadenantes: el primero de ellos referido a la pérdida asegurada del comprador del contrato, o indemnización, y el segundo referido a las pérdidas de la industria aseguradora subyacente (Ishaq, 2005 y Pérez-Fructuoso, 2006). Este segundo desencadenante se utiliza para garantizar que la cobertura ILW tenga un tratamiento contable similar al del reaseguro y para diferenciar a estos instrumentos de los contratos de activos derivados puros.

El rasgo fundamental de este tipo de contratos es que la indemnización se condiciona a los daños ocurridos en el sector. Esto lleva a que el desencadenante operativo del ILW sea un índice de pérdidas de la industria y no la pérdida real sufrida por la compañía lo que genera un riesgo de cobertura insuficiente (Doherty et al., 2002), o riesgo de base, en caso de que la pérdida reflejada en el índice sea menor que la cuantía establecida como desencadenante (por ejemplo, en aquellas compañías cuya concentración de exposiciones a un determinado riesgo sea muy superior a la concentración media de la industria aseguradora).

2.1. Características y tipos de contratos ILW

En términos generales, un contrato ILW contiene los siguientes elementos característicos (McDonnell, 2002 y Pérez-Fructuoso, 2006):

- **Territorio:** se refiere a la zona geográfica en la que se han de producir las pérdidas por catástrofes para que entre en funcionamiento el desencadenante del contrato. Más del 70% de los contratos ILW emitidos hasta la fecha cubren, exclusivamente, exposiciones en EE.UU. y sus territorios.

- **Vencimiento:** es la duración del contrato y, debido a su flexibilidad, puede ser diario, mensual, anual o de vencimiento superior. Esto permite a las aseguradoras cubrirse del riesgo incluso en el mismo momento en el se produce un evento catastrófico o cuando existen evidencias de que va a producirse una catástrofe. Por ejemplo, puede haber un huracán dirigiéndose hacia Florida dos días antes, y los ILW pueden contratarse hasta 10 minutos antes de que llegue la tormenta. Lógicamente, cuanto más cerca se encuentre dicha tormenta más caro será el contrato.

- **Riesgos cubiertos:** aunque la cobertura del ILW puede realizarse sobre cualquier tipo de riesgo, en los últimos años han limitado su protección contra daños derivados de sucesos de naturaleza catastrófica.

- **Desencadenante (Warranty):** es el valor de las pérdidas aseguradas de la industria subyacente.

- **Índice:** los índices de pérdidas más utilizados son los desarrollados por Property Claims Services, o índices PCS. Estos índices se basan en estimaciones de pérdidas de daños y responsabilidad civil por catástrofes que afectan a los estados de California, Texas o Florida o bien a las regiones Nacional, Este, Noreste, Sudeste, Medio-oeste u Oeste de los Estados Unidos, y se elaboran a partir de encuestas realizadas sobre la industria aseguradora correspondiente así como durante la evaluación del evento ocurrido sobre el terreno. Existen también otros índices, como el *Sigma* o el *NatCatSERVICE* que recogen las pérdidas sufridas en áreas geográficas fuera de los EE.UU. Lógicamente, el comprador del ILW escogerá aquel índice que cubra las zonas sobre las cuales se distribuye la mayor parte de su negocio.

- **Periodo de declaración:** es un periodo que se inicia inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe, durante el cual el asegurado puede declarar las pérdidas que van a formar parte del contrato ILW. La duración habitual de este periodo es de 36 meses (aunque también puede ser anual), y suele finalizar después del vencimiento del ILW.

- **Límite:** es la cuantía de protección comprada con el ILW, fijada, después del huracán Katrina, en 20.000.000.000 de dólares.

- **Retención:** es la cuantía de las pérdidas que van a cargo del comprador del ILW y suele fijarse en valores alrededor de los 1.000 dólares.

- **Prima, Fechas de Pago de Primas y Condiciones Generales:** como en un contrato de seguro o reaseguro tradicional el precio del ILW se paga al inicio del contrato, aunque existe la posibilidad de fraccionar su importe. Las condiciones generales del ILW también coinciden con las que normalmente forman parte de un contrato de reaseguro catastrófico de exceso de pérdidas tradicional.

- **Exclusiones:** desde el punto de vista de la reaseguradora, es imprescindible determinar los ramos de seguro incluidos en la elaboración del índice de pérdidas desencadenante.

- **Restablecimiento:** los ILW se diseñan frecuentemente con una provisión de restablecimiento. De este si un evento desencadena la póliza, el cliente pagará otra prima, que normalmente coincide con la pagada por el límite original, para reinstaurar la cobertura dos o incluso hasta tres veces más.

Los contratos ILW pueden realizar la cobertura de daños por catástrofes de dos formas: por ocurrencia o de forma agregada (Canabarro, et al., 1998; Ishaq, 2005; McDonnell, 2002 y Pérez-Fructuoso, 2006).

Los contratos ILW de ocurrencia protegen contra la severidad de las pérdidas por lo que habitualmente establecen un valor del desencadenante mucho más elevado que en el ILW de tipo agregado. Considerar como ejemplo, un ILW cuya duración se extiende del 1 de enero de 2007 al 01 de enero de 2008. Este contrato cubre los daños derivados de cualquier tipo de catástrofe natural, cuando las pérdidas de la industria aseguradora en 50 estados de EE.UU., reflejadas en el índice PCS correspondiente, superan los 20.000.000.000 de dólares. El límite de cobertura del contrato se establece en 10.000.000 de dólares y la retención a cargo del asegurado es de 10.000 dólares. En este caso, una vez que entra en funcionamiento el desencadenante (cuando las pérdidas de la industria superan los 20.000.0000 de dólares), el comprador recupera 10.000.000 de dólares, y por tanto dispone de 10.010.000 de dólares para cubrir pérdidas catastróficas netas. Si las pérdidas recogidas en el índice PCS alcanzaran, por ejemplo, un valor de 19.000.000.000 de dólares, el comprador de protección ILW dispondría de un periodo de declaración de 36 meses desde el momento de ocurrencia de las pérdidas para aumentar la cuantía del índice *PCS* y así conseguir satisfacer, el warranty.

Por otra parte, los contratos ILW agregados protegen contra la frecuencia en la ocurrencia de las pérdidas catastróficas. A diferencia del contrato de ocurrencia, el desencadenante de un ILW agregado es bastante bajo y no consideran la posibilidad de contratar provisión de restablecimiento. Como ejemplo de un ILW agregado podría considerarse un contrato que se inicia el 01-01-2007, finaliza el 01-01-2008 y cubre las pérdidas catastróficas derivadas de cualquier riesgo de la naturaleza excepto de terremotos e incendios, siempre que el índice PCS para 48 estados de EE.UU. no supere los 1.000.000.000 de dólares. El límite de cobertura del contrato es de 10.000.000 de dólares y la retención a cargo del asegurado asciende a 10.000 dólares. En este caso, para que se lleve a cabo la indemnización se establece que la cuantía agregada de las pérdidas de la compañía debe superar los 6.000.000.000 de dólares lo que normalmente sucede cuando se produce un mínimo de siete catástrofes naturales. Si esto es así, el cliente recupera 10.000.000 de dólares y dispone de un máximo de 10.010.00 de dólares para cubrir pérdidas catastróficas netas. El periodo de declaración es de 36 meses a contar desde el momento del vencimiento del contrato.

Actualmente, la mayor parte de los contratos ILW son de ocurrencia (más del 90%) y sólo el 10% restante se destina a contratos agregados. Esto se debe a que, tradicionalmente, los compradores de reaseguro se han preocupado en mayor grado por la cobertura de la severidad de las pérdidas que por la frecuencia de las mismas (Benfield Group Limited, 2005). Tanto en los contratos ILW de ocurrencia como en los agregados, el resultado al vencimiento puede ser *binario* o *a prorrata*. También más del 90% de los ILW tienen desencadenantes binarios, lo que significa que el reasegurador, que vende la cobertura ILW, paga el 100% del límite una vez que se ha alcanzado el desencadenante, suponiendo que el comprador tenga una pérdida máxima neta igual o superior al límite del contrato más la retención. El problema de realizar los pagos de esta forma es que, desde el punto de vista de los compradores, se generan dudas acerca de si las pérdidas aseguradas de la industria original se declararán únicamente hasta alcanzar justo el nivel por debajo del punto de intervención del contrato comprado. Desde el punto de vista de los vendedores, la duda surge al considerar si dichas pérdidas se declaran justo por encima del valor del desencadenante. Como respuesta a estas inquietudes se desarrollan los ILW a prorrata, cuya estructura de pagos se basa en una proporcionalidad al nivel de las pérdidas aseguradas de la industria original.

2.2. Estructura de pagos de un Industry Loss Warranty (ILW)

Un ILW es un instrumento financiero-actuarial que da cobertura a los aseguradores (reaseguradores) contra grandes pérdidas aseguradas asociadas a la ocurrencia de eventos extremos tales como catástrofes naturales o antrópicas.

Al inicio de la operación, el comprador del ILW paga al vendedor una prima por la protección contratada. A cambio, el asegurador (reasegurador) cubierto puede realizar una reclamación (X), que es función de un índice de pérdidas de la industria subyacente, $X = f(IP^I)$, cuando se produce, en el mercado considerado, una pérdida de gran magnitud.

En un contrato ILW, esta reclamación, puede estructurarse como un derivado (ILW binario) o como un contrato basado en indemnización (Zeng, 2000 y 2003).

Cuando el ILW se estructura como un derivado, el comprador que sufre una pérdida L, puede reclamar por un importe igual al límite establecido en el ILW, (C), siempre que el índice de pérdidas de la industria, (IP^I), exceda un determinado umbral, (T), conocido como desencadenante, independientemente del valor actual de las pérdidas en las que haya incurrido el comprador. En este caso, los pagos, X, del ILW en función de las variables C, T y IP^I son:

$$X = \begin{cases} C & IP^I \geq T \\ 0 & IP^I < T \end{cases}$$

y el resultado neto para el asegurado después de la cobertura resulta:

$$LN = max[0, L - X] = max[0, L - f(IP^I)]$$

para dar un tratamiento contable de reaseguro al contrato y por tanto eliminado la posibilidad de cobertura por encima del valor de la pérdida sufrida, $X > L$. En este caso, la pérdida neta para el comprador del ILW tiene los mismos resultados que una opción de compra tradicional en la que L equivale al precio del subyacente en el momento del ejercicio de la opción y $X = f(IP^I)$ es el precio de ejercicio de la misma, función del índice de pérdidas de la industria subyacente.

Cuando los pagos del ILW se estructuran en forma de indemnización, el comprador puede reclamar por un importe igual al valor de sus pérdidas, L, hasta el límite establecido en el contrato, C, siempre que las pérdidas de la industria reflejadas en el índice subyacente, IP^I, excedan el desencadenante, T.

Los pagos X del contrato en función de R, C, T, IP^I y L son en este caso:

$$X = \begin{cases} min(C, L) & IP^I \geq T \\ 0 & IP^I < T \end{cases}$$

y la pérdida neta para el asegurado después de la cobertura resulta:

$$LN = L - X = L - f(IP^I)$$

3. Teoría de cópulas aplicable al sector asegurador

Las cópulas son un instrumento adecuado para representar las relaciones de dependencia entre distintas variables aleatorias a través de la distribución de probabilidad conjunta. De hecho, la función de distribución conjunta de una serie de variables aleatorias puede expresarse como la función cópula aplicada sobre las distribuciones marginales consideradas individualmente.

En el caso bivariante, una cópula, C, es una función de distribución $C(u,v) = p[U \leq u, V \leq v]$ definida en $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ donde U y V son dos variables aleatorias uniformemente distribuidas.

Entonces, dadas dos variables aleatorias X e Y con distribuciones marginales F_X y F_Y respectivamente, existe una cópula $C, \forall(x,y) \in [-\infty,\infty]^2$, tal que:

$$F(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

de forma que si las distribuciones marginales son continuas, la cópula es única. Este resultado, conocido como el teorema de Sklar, es uno de los teoremas más importantes relacionados con la teoría de cópulas ya que muchas de las aplicaciones prácticas de este tipo de distribuciones están basadas en él. De su definición se desprende que a partir de las cópulas, es posible crear distribuciones bivariantes con distribuciones marginales definidas y que las funciones de distribución marginales univariantes pueden tener una estructura separada de la estructura de la cópula.

Como corolario del teorema de Sklar se definen F, C, F_X y F_Y como en los enunciados anteriores, y F_X^{-1} y F_Y^{-1} como las respectivas funciones inversas generalizadas de F_X y F_Y tal que, $\forall(u,v) \in [0,1]^2$,

$$C(u,v) = F(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y))$$

3.1. La familia de cópulas Arquimedianas

En las aplicaciones relacionadas con el sector asegurador se produce con frecuencia una mayor dependencia entre los grandes siniestros que entre los pequeños. Tal asimetría se valora de forma adecuada a través de la familia de cópulas Arquimedianas, cuya representación, muy simple, permite reducir el estudio de una cópula multivariante al estudio de una única función univariante.

Consideramos el caso de las cópulas bivariantes y suponemos que ϕ es una función convexa, decreciente, con dominio $(0,1]$ y rango $[0,\infty)$ tal que $\phi(1) = 0$. ϕ^{-1} es la función inversa de ϕ. Entonces la función,

$$C_{\phi}(u,v)=\phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) \;\; para \;\; u,v \in (0,1]$$

se denomina cópula Arquimediana y ϕ es la función generador de la cópula C_{ϕ}. En el cuadro a continuación se presentan, según el generador seleccionado y teniendo en cuenta que un generador determina una cópula únicamente, las familias de cópulas Aquimedianas utilizadas en la aplicación práctica desarrollada en este artículo,

Tabla 1: Generadores y funciones de distribución de las cópulas Arquimedianas

Familia	**Generador**	**Parámetro de dependencia**	**Cópula Bivariante**
Frank	$\varphi(t)=-\ln\left(\frac{e^{-at}-1}{e^{-a}-1}\right)$	$a \neq 0$	$C_a(u,v)=-\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{(e^{-au}-1)(e^{-av}-1)}{e^{-a}-1}\right)$
Gumbel	$\varphi(t)=(-\ln(t))^a$	$a \geq 1$	$C_a(u,v)=\exp\left(-\left[(-\ln(u))^a+(-\ln(v))^a\right]^{\frac{1}{a}}\right)$
Clayton	$\varphi(t)=a\left(t^{-\frac{1}{a}}-1\right)$	$a>0$	$C_a(u,v)=\left(u^{-\frac{1}{a}}+v^{-\frac{1}{a}}-1\right)^{-a}$

Además y a pesar de no pertenecer a la familia de cópulas Arquimedianas, la cópula HRT también se ha incluido en el modelo empírico por dos razones fundamentales: en primer lugar porque gráficamente se observa que la concentración teórica de sus puntos (en torno al (1,1)) se ajusta adecuadamente a los riesgos catastróficos del sector asegurador, y en segundo lugar por ser la cópula de supervivencia de la Cópula *Clayton*.

La expresión de la función de distribución para la cópula *HRT* es:

$$C_a(u,v)=u+v-1+\left[(1-u)^{-\frac{1}{a}}+(1-v)^{-\frac{1}{a}}-1\right]^{-a}$$

3.2. Medida de la dependencia con cópulas. El coeficiente de correlación de Kendall

El coeficiente de correlación lineal, o coeficiente de Pearson, es el instrumento tradicionalmente utilizado en la práctica para medir la dependencia entre variables aleatorias. Las razones de su extendido uso se basan en la facilidad para calcularlo y en su aplicabilidad natural cuando se analiza la dependencia en distribuciones elípticas tales como la distribución normal o la t-Student. Sin embargo, en muchas ocasiones las distribuciones empleadas para representar la realidad del mercado asegurador no son elípticas y, en esos casos, utilizar el coeficiente de correlación lineal para medir la dependencia puede conducir a graves errores al no permanecer invariante ante transformaciones estrictamente crecientes de las distribuciones marginales utilizadas. Para solventar esta cuestión se podrán utilizar medidas de concordancia como el coeficiente de correlación de *Kendall* que además tiene la ventaja estar relacionado con el parámetro de las cópulas Arquimedianas.

Dado un par de variables aleatorias (X,Y), la medida de correlación τ de *Kendall* se define como:

$$\tau(X,Y) = p[(x-x')(y-y')>0] - p[(x-x')(y-y')<0]$$

la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia de dos observaciones distintas, (x,y) y (x',y'), de ese par aleatorio, de forma que:

- $-1 \leq \tau \leq 1$
- Si X e Y son concordantes entonces, $\tau = 1$.
- Si X e Y no son concordantes entonces, $\tau = -1$.
- Si X e Y son independientes entonces, $\tau = 0$. La implicación inversa no tiene porque ser cierta, es decir, si $\tau = 0$, las variables X e Y no son necesariamente independientes.

- Si α y β son dos funciones estrictamente crecientes, entonces $\tau[\alpha(X), \beta(Y)] = \tau(X, Y)$.
- τ no depende de la copula de (X, Y).

Existen diversas definiciones del coeficiente de correlación de Kendall siendo la más simple $\tau = 4E(C(u, v)) - 1$. Cuando las variables X e Y tienen una cópula Arquimediana C, esta expresión puede rescribirse como:

$$\tau(X, Y) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$$

resultando para cada una de las cópulas consideradas en el artículo,

- Cópula de *Frank*: $\tau(a) = 1 - \dfrac{4}{a} + \dfrac{4}{a^2}\displaystyle\int_0^a \frac{t}{e^t - 1}dt$
- Cópula Gumbel: $\tau(a) = 1 - \dfrac{1}{a}$
- Cópula de Clayton: $\tau(a) = \dfrac{1}{(2a + 1)}$
- Cópula HRT: $\tau(a) = \dfrac{1}{2a + 1}$

4. Método empírico de selección de la cópula bivariante óptima aplicable al sector asegurador y proceso general de cálculo de primas

A la hora de seleccionar la mejor cópula para calcular la prima de contrato ILW (o de cualquier producto de reaseguro tradicional o alternativo) es necesario disponer de series históricas de cuantías siniestrales, reales o simuladas a través del método de MonteCarlo, cuya disponibilidad depende del nivel de información a la que tiene acceso el asegurador.

Sean $X = \{x_i\}$ e $Y = \{y_i\}$, con $i = 1,2,\ldots,n$, dos series de datos de n cuantías de pérdidas asociadas a dos ramos de seguros no vida afectados por el riesgo de catástrofes y obtenidas, en este artículo, mediante simulación de MonteCarlo (Rivas, et al. 2007).

Los pasos a seguir para modelar el proceso de elección de la cópula óptima, se muestran en la Figura 1 (Rivas, et al., 2005):

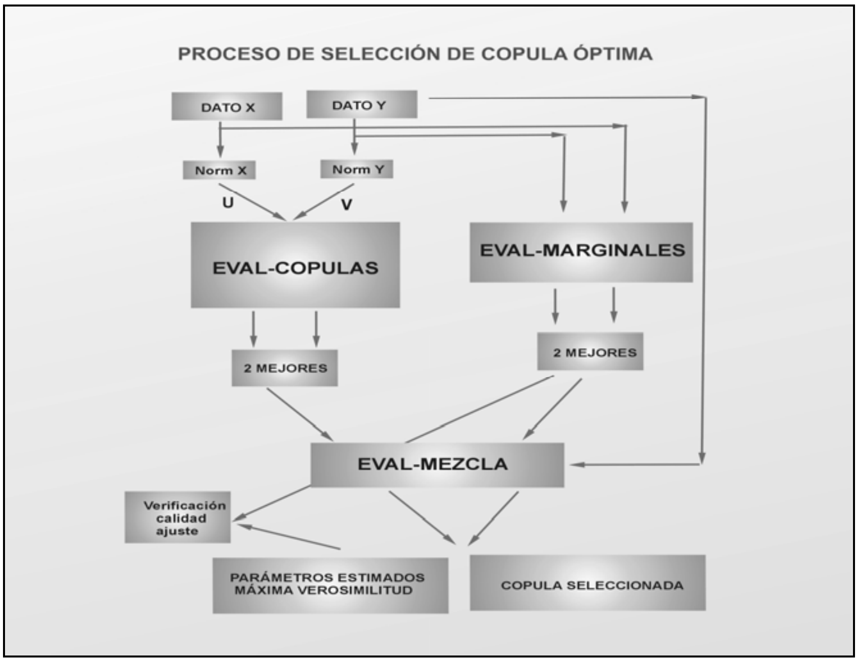

Figura 1: Proceso de selección de la cópula óptima

1. En primer lugar, se transforman las series de datos X e Y, en vectores uniformemente distribuidos entre $[0,1]$, U y V, siendo $U=\{u_i\}$ y $V=\{v_i\}$, con $i=1,2,\ldots,n$. Para ello, se utiliza la función de distribución empírica dada por:

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1_{\{x_i\leq x\}}=\frac{card\{x_i\leq x\}}{n}$$

2. A continuación, se estima el parámetro “a” de la cópula por máxima verosimilitud,

$$\hat{a} = \arg\max \sum_{i=1}^{n} \ln c(u_i, v_i; a),$$

siendo c la función de densidad de la copula.

3. Seguidamente, se seleccionan las distribuciones marginales que se quieren evaluar y se estiman sus parámetros, también por máxima verosimilitud. La distribución marginal que mejor se ajusta a cada serie de datos, se selecciona mediante la aplicación de los criterios Akaike Information (AIC) o Hannan-Quinn Information (HQ).

4. Una vez seleccionadas la cópula y las distribuciones marginales, se construye la nueva función de distribución y se estiman nuevamente sus parámetros, utilizando el método de máxima verosimilitud.

5. Finalmente contrasta la bondad del ajuste realizado mediante el test de la χ^2.

La aplicación al sector asegurador de este proceso de selección de la cópula permite concluir que las relaciones de dependencia que se establecen entre los grandes siniestros se valoran de forma adecuada a través de la familia de cópulas Arquimedianas (Joe, 2001 y Levi, 2001), especialmente con la cópula de *Gumbel* y la *HRT*. En cualquier caso, se ha de tener en cuenta, que la elección de la cópula óptima dependerá de las relaciones de dependencia concretas, que muestren los datos de siniestralidad analizados.

Respecto a las distribuciones marginales, en este articulo se selecciona un conjunto de distribuciones típicamente de cola larga (Lognormal, Paralogística, Logística, Exponencial y Pareto), y se combinan con las cópulas Arquimedianas seleccionadas para analizar todas las posibles composiciones de cópulas y marginales que dan lugar a los mejores resultados de prima de reaseguro del ILW considerado.

Una vez realizado este proceso, el método general de cálculo de la prima de un producto ART utilizando la teoría de cópulas se describe en la figura 2 a continuación:

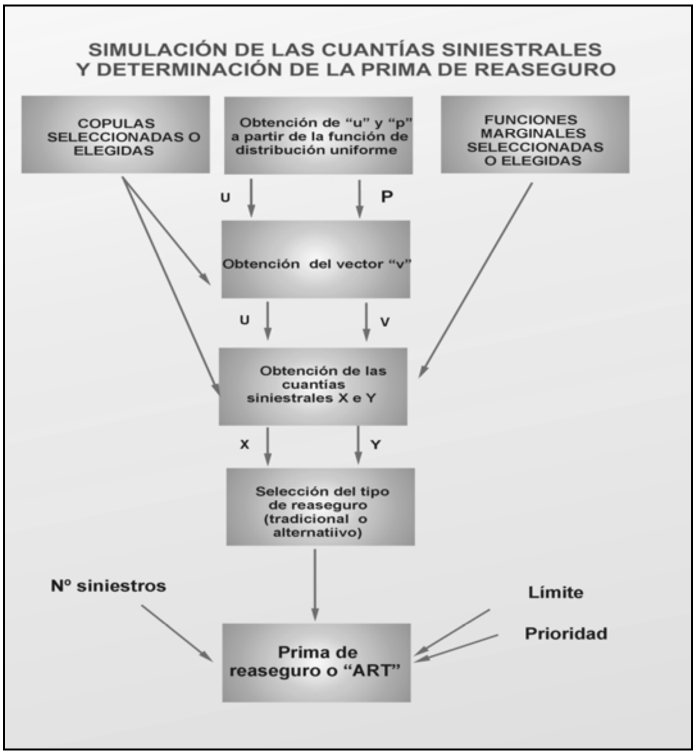

Figura 2: Cálculo de la prima de reaseguro

1. Se generan dos series de datos uniformemente distribuidos U y P.

2. A partir de ellos y de la cópula seleccionada, se obtiene la serie de datos uniformemente distribuidos $V = \{v_i\}$ (Levi, 2001).

3. Una vez calculados $U = \{u_i\}$ y $V = \{v_i\}$ y teniendo en cuenta las funciones de distribución marginales y la cópula seleccionada se obtienen las cuantías siniestrales $X = \{x_i\}$ e $Y = \{y_i\}$ (Cherubini, 2004).

4. Finalmente se decide el producto ART que mejor se ajusta a la cobertura de las necesidades de la compañía y se calcula la prima de dicho producto en función de los datos de pérdidas simulados y de sus características particulares.

Para llevar a cabo los cálculos numéricos asociados al contrato ILW descrito en el artículo (o de cualquier producto de reaseguro tradicional o alternativo que se quiera valorar), se ha desarrollado una colección de funciones para Matlab 7 (ICT) que implementa cada uno de los diferentes pasos necesarios para la simulación de cuantías siniestrales teniendo en cuenta las cópulas y marginales seleccionadas así como permite determinar la prima en función de las características del contrato de reaseguro alternativo, en el presente caso para ILW.

5. Modelo para el cálculo de la prima de un Industry Loss Warranty de ocurrencia

Como se ha descrito anteriormente, un Industry Loss Warranty, es un contrato de reaseguro cuyos resultados dependen de dos tipos de desencadenantes: el primero de ellos se refiere a la pérdida asegurada del comprador del contrato, o indemnización; el segundo desencadenante son las pérdidas de la industria aseguradora subyacente. El objetivo último del ILW, en cualquier caso, es proteger a su comprador contra las pérdidas asociadas a un siniestro de naturaleza catastrófica.

A continuación, presentamos aquellos aspectos relevantes a la hora de fijar la prima de un producto de estas características y las variables fundamentales para calcular el precio mínimo exigido por el vendedor del ILW como consecuencia de asumir el riesgo catastrófico transferido. La aplicación práctica se realiza para un contrato ILW de ocurrencia, ya que son el tipo de producto con mayor grado de utilización el la actualidad.

El precio de un ILW de ocurrencia viene dado por el mercado a través del juego que se establece entre las leyes de oferta y demanda. Por tanto, el precio para dos vendedores distintos puede variar e incluso a veces de forma sustancialmente considerable. Por su parte, el precio mínimo exigido por el vendedor del ILW se calcula como la suma del coste histórico de las pérdidas y serie de factores, especificados a continuación, entre los que destaca la variable que muestra la posible desviación respecto de las pérdidas esperadas (Ishaq, 2005),

$$\text{Precio Mínimo} = \text{Lost cost} + \text{risk load} + \text{gastos} + \text{beneficio requerido}$$

donde:

- El *Lost Cost* es la probabilidad anual de pérdidas.

- El *Risk Load* determina el porcentaje de la volatilidad respecto de las pérdidas, percibida por el vendedor.

- Los *Gastos* se refieren a los gastos de estructura del vendedor.

- El *Beneficio Requerido* es un cálculo interno para la compañía y corresponde a la mínima cuantía requerida por el vendedor, en la que se debe incluir el coste de oportunidad de otras inversiones alternativas.

Para fijar este precio mínimo requerido es necesario establecer, en primer lugar, una serie de variables de entrada tanto en el cálculo del *Lost Cost* como para el cálculo del R*isk Load*. En cuanto al *Lost Cost* se fijan dos desencadenantes, uno mínimo referido a las pérdidas mínimas de la industria bajo las cuales la cobertura del producto ILW se activa, y otro máximo que refleja las pérdidas por encima de las cuales el ILW no se pone en funcionamiento.

Para cada año se obtiene la probabilidad anual de pérdidas a partir de la siguiente expresión:

$$\text{Pago Trigger}_{(\text{evento,año})} = \begin{cases} 1 \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{Loss}_{(\text{evento,industria})} > \text{Triggermin} \\ \text{Loss}_{(\text{evento,industria})} < \text{Triggermax} \end{array} \right\} \\ 0 \rightarrow & \text{Triggermax} < \text{Loss}_{(\text{evento,industria})} < \text{Triggermin} \end{cases}$$

y con ella, el *Lost Cost* resulta:

$$\text{Lost Cost} = \frac{\text{Pagos Trigger}_{(\text{evento,año})}}{\text{Casos posibles o simulaciones realizadas}}$$

Para calcular el *Risk Load* se ha de establecer un coeficiente de variación máximo y otro mínimo cuyo valor viene dado por el tipo de rentabilidad requerido o Roe_{target} cuya forma de cálculo es:

$$Roe_{target} = \begin{cases} Roe_{min} \rightarrow CV \leq CV_{min} \\ Roe_{max} \rightarrow CV_{max} \leq CV \\ \dfrac{CV - CV_{min}}{CV_{max} - CV}\left(Roe_{max} - Roe_{min}\right) \rightarrow CV_{min} < CV < CV_{max} \end{cases}$$

donde CV es el coeficiente de variación asociado a las pérdidas relacionadas con el contrato.

Finalmente, para determinar el precio mínimo requerido, las variables gastos de estructura y beneficio requerido, serán variables de entrada en el modelo constantes.

Con ello, la prima del contrato ILW se calcula como la esperanza matemática de las pérdidas teniendo en cuenta su distribución de probabilidad asociada y la desviación típica respecto a dicho valor medio.

5.1. Algoritmo de simulación

En el algoritmo de cálculo de la prima de un Industry Loss Warranty se ha introducido la teoría de cópulas con el objetivo de considerar las relaciones de dependencia entre los distintos factores de riesgo asociados a un mismo suceso de naturaleza catastrófica.

A partir de la definición del modelo para calcular la prima del ILW, los pasos realizados para llevar a cabo su programación han sido los siguientes:

- Se considera que el contrato ILW se establece para cubrir las pérdidas por catástrofes que pueden producirse en dos ramos de seguros determinados X e Y (por ejemplo, daños y responsabilidad civil). Dichas cuantías siniestrales se simulan por MonteCarlo, teniendo en cuenta las funciones de distribución marginales y cópula elegidas.

- Dentro del algoritmo de simulación realizado se calculan cuatro valores distintos:

  - *Prima del ILW*: definida como las pérdidas esperadas más la desviación típica.

  - *Lost Cost*: para lo cual ha sido necesario fijar un desencadenante mínimo y otro máximo, ambos referidos a los valores de pérdidas de la industria. Una vez establecidos dichos desencadenantes, se han simulado las cuantías x_i e y_i y se ha realizado la suma de dichos valores para i generado. De esta forma, si la cuantía obtenida se encuentra entre los valores de los desencadenantes se le asigna a la variable *PagosTrigger* el valor 1. En otro caso se le asigna el valor cero. Finalizado este proceso se suman todos los valores de la variable *PagosTrigger* y se divide por el número de casos posibles para obtener la probabilidad anual de pérdidas o *Lost Cost*. Este valor se tendrá en cuenta a la hora de calcular el precio mínimo requerido del ILW.

  - Roe_{target}: esta variable se ha obtenido comparando el coeficiente de variación mínimo y máximo así como el Roe_{min} y Roe_{max}, definidos como variables de entrada del programa.

  - Precio mínimo requerido: finalmente se calcula el precio mínimo sumando las variables *Lost Cost* y Roe_{target} simuladas y las variables de entrada gastos de estructura y beneficio requerido.

Los valores asignados a las variables de entrada del programa son los siguientes:

- Desencadenante máximo y mínimo respectivamente: 10.000.000€ y 200.000€
- Coeficiente de variación máximo y mínimo respectivamente 90% y 10%

- Roe_{min} : 10% y Roe_{max} : 90%
- Gastos de estructura: 25%
- Beneficio Requerido: 25%

5.2. Resultados

En las tablas a continuación, se muestran los resultados obtenidos en la simulación de la prima de un ILW de ocurrencia, teniendo en cuenta las distintas combinaciones de cópulas Arquimedianas y distribuciones marginales analizadas:

Tabla 2: Simulación Prima ILW. Cópula HRT

Marginal X	Marginal Y	Prima	Lost Cost	Risk Load	Precio Mínimo
Paralogística	**Paralogística**	13.868.125,79	0,416	0,9	1,816
Logística	**Paralogística**	12.902.416,25	0,433	0,9	1,833
Pareto	**Paralogística**	19.575.054,34	0,443	0,9	1,843
Lognormal	**Paralogística**	770.008.162,7	0,579	0,9	1,979
Exponencial	**Paralogística**	45.932.072,74	0,397	0,9	1,797
Paralogística	**Logística**	15.890.927,13	0,392	0,9	1,792
Logística	**Logística**	3.850.911,294	0,31	0,750661808	1,560661808
Pareto	**Logística**	4.635.143,472	0,371	0,532480968	1,403480968
Lognormal	**Logística**	20.778.514,4	0,58	0,9	1,98
Exponencial	**Logística**	25.271.854,91	0,391	0,9	1,791
Paralogística	**Pareto**	12.233.172,73	0,444	0,9	1,844
Logística	**Pareto**	3.905.432,95	0,407	0,388062789	1,295062789
Pareto	**Pareto**	3.498.493,081	0,443	0,340434856	1,283434856
Lognormal	**Pareto**	216.692.133,6	0,664	0,9	2,064
Exponencial	**Pareto**	44.285.423,87	0,669	0,9	2,069
Paralogística	**Lognormal**	51.146.258,07	0,554	0,9	1,954
Logística	**Lognormal**	43.906.357,85	0,573	0,9	1,973
Pareto	**Lognormal**	32.711.470,25	0,671	0,9	2,071
Lognormal	**Lognormal**	19.473.251,97	0,589	0,587827452	1,676827452
Exponencial	**Lognormal**	13.752.436,28	0,584	0,9	1,984
Paralogística	**Exponencial**	78.203.045,07	0,428	0,9	1,828
Logística	**Exponencial**	15.411.000,53	0,405	0,9	1,805
Pareto	**Exponencial**	27.086.943,02	0,671	0,9	2,071
Lognormal	**Exponencial**	14.959.646,81	0,582	0,9	1,982
Exponencial	**Exponencial**	3.222.681,808	0,405	0,35161612	1,25661612

Tabla 3: Simulación Prima ILW. Cópula GUMBEL

Marginal X	Marginal Y	Prima	Lost Cost	Risk Load	Precio Mínimo
Paralogística	**Paralogística**	66.199,135	0	0,9	1,4
Logística	**Paralogística**	52.012.916,3	0,103	0,9	1,503
Pareto	**Paralogística**	3.475.484,44	0,087	0,9	1,487
Lognormal	**Paralogística**	50.511.063,6	0,566	0,9	1,966
Exponencial	**Paralogística**	27.972.055,7	0,464	0,9	1,864
Paralogística	**Logística**	15.126.764,2	0,101	0,9	1,501
Logística	**Logística**	43.012,023	0	0,9	1,4
Pareto	**Logística**	1.997.490,53	0,017	0,9	1,417
Lognormal	**Logística**	33.452.483,5	0,585	0,9	1,985
Exponencial	**Logística**	53.710.948,4	0,467	0,9	1,867
Paralogística	**Pareto**	4.845.480,13	0,106	0,9	1,506
Logística	**Pareto**	1.088.982,05	0,027	0,9	1,427
Pareto	**Pareto**	42.996,3664	0	0,727959132	1,227959132
Lognormal	**Pareto**	36.270.662,6	0,644	0,9	2,044
Exponencial	**Pareto**	33.097.213,3	0,721	0,9	2,121
Paralogística	**Lognormal**	33.096.675,5	0,565	0,9	1,965
Logística	**Lognormal**	80.209.162,9	0,569	0,9	1,969
Pareto	**Lognormal**	27.595.463,1	0,689	0,9	2,089
Lognormal	**Lognormal**	23.008.851,6	0,559	0,9	1,959
Exponencial	**Lognormal**	16.468.187,4	0,593	0,9	1,993
Paralogística	**Exponencial**	54.941.824,5	0,469	0,9	1,869
Logística	**Exponencial**	42.183.742,5	0,471	0,9	1,871
Pareto	**Exponencial**	38.737.344,5	0,708	0,9	2,108
Lognormal	**Exponencial**	14.110.268,5	0,639	0,9	2,039
Exponencial	**Exponencial**	3.674.386,9	0,449	0,533447349	1,482447349

Tabla 4: Simulación Prima ILW. Cópula FRANK

Marginal X	Marginal Y	Prima	Lost Cost	Risk Load	Precio Mínimo
Paralogística	**Paralogística**	1.118.172,77	0,017	0,9	1,417
Logística	**Paralogística**	2.278.043,84	0,003	0,9	1,403
Pareto	**Paralogística**	621.084,909	0,006	0,9	1,406
Lognormal	**Paralogística**	18.146.966,8	0,12	0,18602403	0,806024027
Exponencial	**Paralogística**	129.050.495	0,429	0,9	1,829
Paralogística	**Logística**	742.403,907	0,007	0,9	1,407
Logística	**Logística**	295.986,417	0	0,9	1,4
Pareto	**Logística**	475.079,655	0,005	0,9	1,405
Lognormal	**Logística**	18.168.921,3	0,146	0,1906087	0,8366087
Exponencial	**Logística**	20.750.825,7	0,455	0,9	1,855
Paralogística	**Pareto**	650.088,2	0,006	0,9	1,406
Logística	**Pareto**	667.760,374	0,006	0,9	1,406
Pareto	**Pareto**	455.606,57	0,003	0,9	1,403
Lognormal	**Pareto**	18.073.619	0,148	0,190914	0,838914001
Exponencial	**Pareto**	24.210.802,2	0,627	0,9	2,027
Paralogística	**Lognormal**	17.960.751	0,155	0,18575189	0,840751892
Logística	**Lognormal**	18.622.461	0,142	0,20038656	0,842386561
Pareto	**Lognormal**	18.320.586,2	0,152	0,19599978	0,847999775
Lognormal	**Lognormal**	3.564.171.456	0	0,01164006	0,51164006
Exponencial	**Lognormal**	14.871.458,6	0,603	0,9	2,003
Paralogística	**Exponencial**	69.016.546,8	0,462	0,9	1,862
Logística	**Exponencial**	21.890.007,8	0,47	0,9	1,87
Pareto	**Exponencial**	20.361.330	0,652	0,9	2,052
Lognormal	**Exponencial**	15.719.193,4	0,588	0,9	1,988
Exponencial	**Exponencial**	3.547.305,7	0,438	0,52501759	1,463017591

Tabla 5: Simulación Prima ILW. Cópula CLAYTON

Marginal X	Marginal Y	Prima	Lost Cost	Risk Load	Precio Mínimo
Paralogística	**Paralogística**	33.029.856,1	0,588	0,9	1,988
Logística	**Paralogística**	37.359.619,7	0,594	0,9	1,994
Pareto	**Paralogística**	59.849.256,4	0,738	0,9	2,138
Lognormal	**Paralogística**	1.106.074.618	0,47	0,9	1,87
Exponencial	**Paralogística**	164.552.576	0,5	0,9	1,9
Paralogística	**Logística**	58.981.401,4	0,635	0,9	2,035
Logística	**Logística**	13.051.083,5	0,633	0,9	2,033
Pareto	**Logística**	13.728.996,8	0,794	0,9	2,194
Lognormal	**Logística**	214.367.684	0,443	0,9	1,843
Exponencial	**Logística**	51.873.907,3	0,441	0,9	1,841
Paralogística	**Pareto**	140.111.228	0,748	0,9	2,148
Logística	**Pareto**	11.177.641,1	0,803	0,9	2,203
Pareto	**Pareto**	31.686.222,9	0,868	0,9	2,268
Lognormal	**Pareto**	1.077.379.372	0,183	0,9	1,583
Exponencial	**Pareto**	27.100.382,1	0,678	0,9	2,078
Paralogística	**Lognormal**	581.473.653	0,476	0,9	1,876
Logística	**Lognormal**	2.093.242.496	0,431	0,9	1,831
Pareto	**Lognormal**	9.441.738.010	0,172	0,9	1,572
Lognormal	**Lognormal**	12.703.581,1	0,493	0,12833426	1,121334258
Exponencial	**Lognormal**	14.710.376,4	0,609	0,9	2,009
Paralogística	**Exponencial**	15.247.883,5	0,472	0,9	1,872
Logística	**Exponencial**	316.876.311	0,455	0,9	1,855
Pareto	**Exponencial**	40.907.694,6	0,688	0,9	2,088
Lognormal	**Exponencial**	14.126.109	0,613	0,9	2,013
Exponencial	**Exponencial**	3.718.830,01	0,463	0,536351	1,499351004

Tabla 6: Simulación Prima ILW SIN CÓPULA

Marginal X	Marginal Y	Prima	Lost Cost	Risk Load	Precio Mínimo
Paralogística	**Paralogística**	3.194.497,7	0,484	0,1	1,084
Logística	**Paralogística**	3.280.029,198	0,322	0,39251765	1,214517653
Pareto	**Paralogística**	2,86382E+17	0,122	0,9	1,522
Lognormal	**Paralogística**	3.335.841,831	0,313	0,45385736	1,266857355
Exponencial	**Paralogística**	4.365.726,05	0,524	0,13360203	1,157602027
Paralogística	**Logística**	3.280.029,198	0,322	0,39251765	1,214517653
Logística	**Logística**	1.319.067,199	0,148	0,1	0,748
Pareto	**Logística**	2,86382E+17	0,082	0,9	1,482
Lognormal	**Logística**	1.386.667,879	0,151	0,02439905	0,675399054
Exponencial	**Logística**	3.883.517,234	0,439	0,37918388	1,31818388
Paralogística	**Pareto**	2,86382E+17	0,122	0,9	1,522
Logística	**Pareto**	2,86382E+17	0,082	0,9	1,482
Pareto	**Pareto**	3,1804E+16	0,074	0,53675702	1,110757015
Lognormal	**Pareto**	2,86382E+17	0,081	0,9	1,481
Exponencial	**Pareto**	2,86382E+17	0,184	0,9	1,584
Paralogística	**Lognormal**	3.335.841,831	0,313	0,45385736	1,266857355
Logística	**Lognormal**	1.386.667,879	0,151	0,02439905	0,675399054
Pareto	**Lognormal**	2,86382E+17	0,081	0,9	1,481
Lognormal	**Lognormal**	1.213.536,689	0,154	0,1	0,754
Exponencial	**Lognormal**	3.853.348,104	0,428	0,39667208	1,32467208
Paralogística	**Exponencial**	4.365.726,05	0,524	0,13360203	1,157602027
Logística	**Exponencial**	3.883.517,234	0,439	0,37918388	1,31818388
Pareto	**Exponencial**	2,86382E+17	0,184	0,9	1,584
Lognormal	**Exponencial**	3.853.348,104	0,428	0,39667208	1,32467208
Exponencial	**Exponencial**	4.053.561,424	0,525	0,1	1,125

Tabla 7: Coeficiente de Correlación de Kendall

Marginal X	Marginal Y	HRT	GUMBEL	FRANK	CLAYTON
Paralogística	**Paralogística**	0,85394731	**0,46238422**	-0,17884021	0,9999999
Logística	**Paralogística**	0,87595804	0,3116716	-0,17883978	0,9999999
Pareto	**Paralogística**	0,87595804	0,3116716	-0,17883978	0,9999999
Lognormal	**Paralogística**	0,31215935	0,09090909	0,94278583	0,99976187
Exponencial	**Paralogística**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	**Logística**	0,87595804	0,3116716	-0,17883978	0,9999999
Logística	**Logística**	0,85394731	**0,51619627**	-0,17883987	0,9999999
Pareto	**Logística**	0,87595804	0,3116716	-0,17883636	0,9999999
Lognormal	**Logística**	0,31215935	0,09090909	0,94278583	0,99976187
Exponencial	**Logística**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	**Pareto**	0,87595804	0,3116716	-0,17883978	0,9999999
Logística	**Pareto**	0,87595804	0,3116716	-0,17883636	0,9999999
Pareto	**Pareto**	0,85394731	**0,51619627**	-0,17883987	0,9999999
Lognormal	**Pareto**	0,31215935	0,09090909	0,94278583	0,99976187
Exponencial	**Pareto**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	**Lognormal**	0,31215935	0,09090909	0,94278583	0,99952305
Logística	**Lognormal**	0,31215935	0,09090909	0,94278583	0,99952305
Pareto	**Lognormal**	0,31215935	0,09090909	0,94278583	0,99952305
Lognormal	**Lognormal**	0,31215935	0,09234981	0,65846467	1
Exponencial	**Lognormal**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Paralogística	**Exponencial**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Logística	**Exponencial**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Pareto	**Exponencial**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Lognormal	**Exponencial**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935
Exponencial	**Exponencial**	0,31215935	0,09234981	-0,06849297	0,31215935

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la simulación del cálculo de la prima de un Industry Loss Warranty, se observa que el precio más económica viene dado por la cópula de Gumbel en la combinación Pareto-Pareto, con un valor de 42.996,3664€, seguida de la combinación Logística-Logística, 43.012,023€ y Paralogística-Paralogística, 66.199,135€. Comparando estos valores con el menor valor obtenido calculando la prima sin cópulas 1.213.536,689€, se produce un diferencia significativa en favor del asegurado (1.213.536,689-42.996,3664), que ve rebajada la prima que ha de pagar por estar cubierto de un exceso de siniestralidad derivado de la ocurrencia de una catástrofe natural en 1.170.540,32€ respecto al precio del ILW calculado de forma tradicional.

El coeficiente de correlación de Kendall para estas combinaciones (Gumbel-Pareto-Pareto: 0,51619627, Gumbel-Logística-Logística: 0,51619627 y Gumbel-Paralogística-Paralogística: 0,46238422) presenta los mejores valores de concentración de puntos dentro de la cópula de Gumbel seleccionada. Para estas combinaciones, el valor del parámetro de la cópula, $\hat{a}$, estimado mediante el método de máxima-verosimilitud es 1,86006445, 2,06695389 y 2,06695389 respectivamente.

Dentro de las combinaciones de marginales y cópulas elegidas con menor prima, el precio mínimo del producto para el reasegurador, se obtiene para las distribuciones Pareto-Pareto en los ramos X e Y respectivamente con un valor de 1,227959132% sobre el total de pérdidas esperadas de la industria. Para este precio mínimo, el coste de las pérdidas es igual a cero lo que supone que la suma de las cuantías siniestrales simuladas no se encuentran dentro de los límites de desencadenantes establecidos a priori. La desviación, dada por la variable *Risk Load* (ROE_{target}), resulta también la más baja en la combinación Gumbel-Pareto-Pareto (0,727959132).

6. Conclusiones

Después del huracán Katrina, la demanda de reaseguro alternativo ILW ha experimentado un incremento superior al 35%. Ello es debido básicamente a que son instrumentos de cobertura muy sencillos de utilizar, con una estructura muy simple que abarata el coste de asumir riesgo catastrófico facilitando la diversificación de las carteras de pólizas. Por otra parte, y a pesar de ser contratos de reaseguro, la retención que debe realizar la cedente es muy baja (habitualmente unos 10.000 dólares) y su cobertura depende de la pérdida sufrida por la industria aseguradora subyacente. Si se comparan con otros productos de reaseguro, el menor coste de los ILW se debe a la ausencia de asimetría en la información. El reaseguro XL de catástrofes tiene mayor disponibilidad de cobertura y un riesgo de base muy bajo pero la formalización del acuerdo exige que la reaseguradora proyecte las pérdidas de la cedente a partir de la experiencia de reclamaciones de esta última, lo que puede derivar en exposiciones futuras que no se ajustan a la distribución de probabilidad de las pasadas. Por otra parte, la divergencia temporal entre la información que utiliza la reaseguradora para calcular las primas y las reclamaciones reales que se producen durante el periodo asegurado, origina riesgo de base para el reasegurador, que puede mitigarse tarificando para una mayor carga de siniestralidad. Respecto a los bonos de catástrofes, se consideran productos no tradicionales, complejos de utilizar (lo que limita su negociación), pero que permiten el acceso de las aseguradoras a fuentes adicionales de financiación a través de los mercados de capital (Pérez-Fructuoso, 2005 y Rivas et al., 2007). Son instrumentos no estandarizados lo que se traduce en que cada emisión deba estructurarse y suscribirse individualmente produciendo elevados costes de transacción que únicamente pueden ser asumidos por las grandes reaseguradoras multinacionales (Benfield Group Limited, 2005).

En cuanto a la tarificación de los productos alternativos ILW mediante la aplicación de la teoría de cópulas, cabe destacar que la transferencia de riesgos dependientes necesita su propia función de distribución conjunta multivariable (Blum et al. 2002), que refleje una situación de correlación "no lineal." Este grado de correlación se ha analizado en el presente artículo a partir del parámetro a de las cópulas utilizadas cuyo valor se ha estimado por el método de máxima verosimilitud.

El estudio de las relaciones de dependencia que se establecen entre dos ramos de seguros no vida cubiertos a través de un Industry Loss Warranty, y como consecuencia de la ocurrencia de una catástrofe, se ha realizado utilizando la familia de cópulas Arquimedianas por ser las más adecuadas para representar al sector asegurador. Concretamente el artículo analiza cuatro tipos de cópulas: *Frank*, *Clayton*, *Gumbel* y *HRT*, y los resultados obtenidos ponen de manifiesto que la cópula de Gumbel es la que mejor representa el fenómeno considerado. La cópula *HRT,* también es adecuada para modelar el fenómeno catastrófico analizado pero, en nuestro caso, los valores obtenidos para el precio del ILW son superiores a los que se obtienen con la cópula de *Gumbel*.

Todos los cálculos desarrollados en el artículo se han realizado mediante un toolbox para Matlab denominado ICT (Insurance/Copula Toolbox) (Rivas et. al., 2006). Este programa permite elegir distribuciones cópulas y marginales, simular escenarios y calcular las primas del producto analizado simplificando la complejidad matemática y algorítmica a través de un interfaz gráfico fácilmente utilizable por el usuario.

Bibliografía

- Benfield Group Limited (IAR team) (2005). Reinsurance Market and Renewal Review. www.benfieldgroup.com/research/
- Blum, P., A. Dias y P. Embrechts (2002). *The ART of dependence modelling: the latest advances in correlation analysis* en Alternative Risk Strategies. Ed. Morton Lane. Risk Books. London. 339-356.
- Canabarro, E., M. Finkemeier, R. R. Anderson y F. Bendimerad (1998). Analyzing Insurance-Linked Securities. www.rms.com/Publications/rkcat.pdf
- Cherubini, U. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons, Ltd. EE.UU.
- Doherty, N. y A. Richter (2002). Moral Hazard, Basis Risk and Gap Insurance. *Journal of Risk and Insurance*. Vol. 69, pp. 9-24.
- Ishaq, A (2005). Reinsuring for Catastrophes through Industry Loss Warranties-A practical approach. Casualty Actuarial Society *Forum*, ww.casact.org/pubs/forum/05spforum/05spf075.pdf
- Joe, H. (2001). *Multivariate models and dependence concepts*. New York: Chapman & Hall/CRC.
- Levi, Charles M. (2001). Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas. Guy Carpenter y Université Louis Pasteur Strasbourg.
- McDonnell, E (2002). *Industry Loss Warranties* en Alternative Risk Strategies. Edited by Morton Lane. pp. 81-97. Risks Books.
- Pérez-Fructuoso M. J. (2006). Industry Loss Warranties (ILW) ¿Reaseguro alternativo de catástrofes o titulización del riesgo catastrófico?. *Revista Española de Seguros*. Número 126, pp. 309-322.

- Pérez Fructuoso, M. J. (2005). La titulización del riesgo catastrófico: descripción y análisis de los *cat bonds*. *Revista Española de Seguros*. Número 121. 75-92.
- Rivas López, M. V., M. J. Pérez-Fructuoso, A. Cuesta Infante (2007), Aplicación de la teoría de cópulas al cálculo de la prima de emisión de los bonos sobre catástrofes. *Anales del Instituto de Actuarios*. Tercera época, número 10, Año 2004, pp. 115-148.
- Rivas López, V. y A. Cuesta (2006). *Matlab toolbox for generating claim sizes using Archimedean copulas*, WSEAS Transactions on Business and Economics. Issue 3. Vol. 3 (March). 178-183.
- Rivas López, V. y A. Cuesta, (2005). *A method using Copulas for determine the premium of ART products* en New Mathematical Methods in Risk Theory. Workshop in Honour of Hans Bülhmman, Florencia 2005.
- Zeng, L. (2000). On the Basis Risk of Industry Loss Warranties. *The Journal of Risk Finance*, 1(4), pp. 27-32.
- Zeng, L.(2003). *Hedging Catastrophe Risk Using Index-Based ReinsuranceInstruments*. www.casact.org/pubs/forum/03spforum/03spf245.pdf