CONDICIONES PARA UNA INMUNIZACIÓN POR DURACIONES PARA SEGUROS A PRIMA PERIÓDICA

J. Iñaki de La Peña [1]
Profesor Titular de Universidad

RESUMEN

La inmunización es una estrategia inversora encaminada a respaldar un compromiso de pago. El tratamiento que normalmente se ha llevado a cabo contempla que la Entidad dispone de todos los recursos en un inicio para así cumplir tal fin. Sin embargo, en la realidad del mercado asegurador, se comercializan productos a prima periódica por lo que se debe redefinir la condición de igualdad de duraciones de la inmunización clásica.

En este trabajo se demuestran las condiciones que una cartera de títulos debe tener para respaldar los compromisos adquiridos por la entidad aseguradora, en el caso de productos a prima periódica (seguros de vida, muerte, indemnizaciones, etc.). Estas condiciones son la necesidad de estructurarse a una duración superior a la duración del pasivo contemplado para que así esté inmune a los movimientos paralelos del tipo de interés. A iguales resultados se llega para la convexidad.

ABSTRACT

Immunization is an investment strategy focuses on guarantee the payment to be done in future. Usually the Insurer has all the assets at the beginning of the period for investing and completing that aim. But the reality is that there are several insurance products sold at periodical premiums and in this case we have to redefine the typical

[1] Instituto de Estudios Financiero – Actuariales. Universidad del País Vasco . Dirección Avda. Lehendakari Aguirre, 83. 48.015 – BILBAO. Email: efppeesi@bs.ehu.es

condition into a classic immunization about duration equality between asset and liability.

On this paper we develop for one Insurer´s investment portfolio, in the case of periodical premiums products (life products, death products, etc.) the condition that it has to follow: The duration of the assets has to be longer than the duration of the expected payments to be done in the future. Upon this constrain, the Insurance Company is immunized against the interest rate risk. We obtain the same result for the convexity.

PALABRAS CLAVE /KEY WORDS

Inmunización; Gestión de Activo-Pasivos; Riesgo de interés;

1. INTRODUCCIÓN

Los productos de las Entidades Aseguradoras son comercializados tanto a través de primas únicas como de primas periódicas. Es indudable que ya en el mismo momento de la realización del contrato de seguro se está delimitando tanto el grado de compromiso que adquiere la Entidad Aseguradora como la remuneración que por los servicios que va a prestar ha de abonar el tomador del seguro y es asumido por la Entidad desde el mismo momento en el que se firma el contrato y el tomador de seguro abona la primera prima o cuota de aportación.

Si esta prima es única, la Entidad Aseguradora dispone de los recursos económicos para, invirtiéndolos en el mercado, pueda hacer frente al compromiso probable asumido. La estrategia inversora que puede llevar a cabo con un objetivo de hacer frente a un compromiso futuro asumido en el contrato y en base a una rentabilidad mínima contractual, puede ser una estrategia inmunizadora clásica o una inmunización a través de duraciones. Sin embargo cuando el producto actuarial es comercializado a través de aportaciones periódicas, la Entidad Aseguradora asume todo el riesgo desde el momento de la firma del contrato, pero sin embargo no dispone de los mismos fondos económicos para invertir que si hubiese vendido dicho producto a través de una prima única. Esto es, la Entidad Aseguradora al comercializar un producto actuarial a prima periódica se encuentra en una operación de activo - pasivo actuarial conjunta, donde las obligaciones asumidas (pasivo actuarial) implican la existencia de una corriente futura de ingresos probables o cuotas de aportación a abonar (activo actuarial) y que deben tenerse en cuenta a la hora de realizar la planificación inversora de las primas recaudadas por este producto (activo financiero) que generarán intereses y una amortización del principal invertido.

En el presente trabajo se plantean las condiciones de la estrategia inversora inmunizadora para que tenga en cuenta no sólo este activo financiero, sino también el activo actuarial a través de la estructura temporal de ingresos probables futuros y que queda delimitada en el momento de la suscripción del contrato de seguro y en una fecha posterior las obligaciones contractuales quedan patentes en la provisión matemática correspondiente.

Para ello, tras diferenciar el problema presentado con los productos a prima periódica dentro del ámbito de la inmunización, se ahondará en el concepto de la provisión matemática para determinar sobre que método de cálculo de la provisión matemática existe un riesgo de interés.

Posteriormente se procederá a delimitar los compromisos adquiridos dependiendo del tipo de producto actuarial que se trate, así como el valor de los ingresos probables futuros o activo actuarial inherente a la adquisición del compromiso de contratación de un seguro a prima periódica. Con ello se diferenciará el concepto de provisión matemática y valor financiero de la provisión matemática.

El siguiente epígrafe a tratar, el parámetro Duración aplicado al ámbito actuarial, manifiesta la diferencia fundamental de aleatoriedad en el flujo económico a tener en cuenta para su determinación. Con ello se especificarán las características más importantes de esta estrategia inmunizadora, basándose en la sensibilidad del valor financiero de la provisión matemática respecto a variaciones en el tipo de interés empleado, lo cual permite precisamente delimitar las condiciones para aplicar una estrategia inmunizadora por duraciones.

Se termina el presente trabajo con una ilustración práctica de un producto actuarial de ahorro y otro de riesgo que permiten refrendar las condiciones teóricas apuntadas en este trabajo. Estas condiciones permiten plantear en sí la correcta estrategia inversora que tenga en cuenta esta particularidad, cual es la de contemplar los futuros ingresos a los que contractualmente se obliga el tomador del seguro en el momento en el que se suscribe la póliza de seguros.

2. INMUNIZACIÓN

Las estrategias inversoras inmunizadoras consisten en la creación de una cartera de inversiones (activos) de forma que generen los suficientes flujos económicos para que se haga frente a un compromiso o varios compromisos de pago futuros, independientemente de las variaciones que experimente el tipo de interés de mercado y garantizando un tanto de rendimiento durante el periodo de tiempo planificado.

Basada en el teorema de Fisher & Weil [Fisher & Weil, 1971], para una estrategia inversora de inmunización simple bastará con igualar la duración del activo con el horizonte de planificación del inversor y, para una estrategia inversora de inmunización múltiple, será necesaria la igualación de duraciones de tanto el activo como del pasivo [De La Peña, 1997].

Habitualmente dentro de las Entidades Aseguradoras de vida se ha empleado la inmunización en sentido amplio (ya sea a través de una congruencia absoluta, positiva o temporal) para asegurar compromisos asumidos y a extinguir, como pueden ser carteras de pasivos. En estos casos y como contraprestación a una prima única, la entidad aseguradora se comprometía a abonar las prestaciones que correspondiesen hasta la extinción del colectivo. Se puede afirmar que creaba un fondo especializado *(dedicated fund)* para la cobertura de estos compromisos con la prima recaudada [Bader, L. 1985].

En este caso se plantea un programa lineal para encontrar aquella cartera de inversiones que con menor coste pueda hacer frente a la estructura de pagos probables a realizar (en cuantía y tiempo) bajo diversas restricciones, dependiendo del tipo de subestrategia inmunizadora contemplada: Absoluta, positiva o temporal.

Bajo una congruencia absoluta se contempla que los ingresos del fondo inversor (intereses más la amortización de los activos invertidos) han de ser igual al compromiso asumido (pago probable) para cada uno de los ejercicios económicos futuros contemplados.

En una congruencia positiva se procede a la igualación de duraciones, tanto del activo como del pasivo con lo que pequeñas variaciones en el tipo de interés no afectarán al normal desarrollo de los pagos. No obstante ante variaciones mayores del tipo de interés se procede tanto a la igualación de convexidades como a una revisión periódica de la cartera, siguiendo los postulados de Redington [Redington, 1952]. Esta es la estrategia inversora que se propone en el presente trabajo teniendo en cuenta la periodicidad de la prima de seguro y para la que se realiza el análisis de duraciones correspondientes.

Finalmente en la congruencia temporal además de la igualación de las duraciones existe un casamiento perfecto de los flujos económicos a abonar durante los primeros periodos (t primeros periodos).

En todos los casos habitualmente la Entidad Aseguradora dispone inicialmente del fondo inversor suficiente (*fully funded*) como para buscar la cartera de inversiones que haga frente a tales compromisos, habida cuenta que han sido comercializados a través de una prima única.

Sin embargo existen productos que se comercializan a prima periódica. Esto es, un riesgo que puede darse en s periodos y es financiada su cobertura en n primas periódicas tal que,

$$n \leq s$$

En este caso la estrategia inversora de la compañía ha de tener en cuenta:

1. Los compromisos totales asumidos (el pasivo actuarial).
2. Las primas recaudadas y las inversiones correspondientes a éstas (activo financiero).
3. Estructura de ingresos probables futuros según el contrato de seguro (activo actuarial).

Es esta la estrategia inversora que se plantea en el epígrafe correspondiente y que tendrá en cuenta este activo actuarial futuro para el caso de que se materialicen las aportaciones futuras y que nos delimitará las características que debe tener el activo financiero en el que se materialicen las inversiones de las primas recaudadas.

3. EL BALANCE DEL ACTIVO Y PASIVO ACTUARIAL: LA PROVISIÓN MATEMÁTICA

3.1. Concepto

El pasivo de una entidad aseguradora lo constituyen las obligaciones estipuladas en la mencionada póliza de seguro, de acuerdo a un reglamento donde tras la elección de un determinado método de coste o financiación diseñado por el actuario, se determinan las aportaciones o primas a abonar. Dependiendo del método de coste elegido, también se determina la provisión matemática entendida como *aquella parte del valor actuarial de las prestaciones que debe estar constituida a la edad alcanzada, dependiendo de las hipótesis del plan y en base al desarrollo normal y acertado de éstas* [Betzuen, 1.989].

En el momento de la contratación de la póliza de seguros, el tomador no ha abonado ninguna cantidad y por tanto su correspondiente provisión matemática (*PM*) es nula:

$$PM_{x_e} = 0 \qquad [1]$$

Siendo x_e la edad de entrada o edad de contratación.

En el caso de que se contrate un producto actuarial de ahorro como puede ser el de percibir en forma de renta periódica vitalicia a partir de la edad de jubilación (x_j) de cuantía B, al alcanzar dicha edad de jubilación, el valor de las prestaciones futuras ha tenido que ser amortizado y constituido, siendo el valor de la provisión el mismo que el valor actual actuarial a la edad de jubilación de las prestaciones futuras:

$$PM_{x_j} = (Va)_{x_j} = \sum_{h=x_j}^{w} B_h \cdot v^{h-x_j} \cdot {}_{h-x_j}p^m_{x_j} \qquad [2]$$

siendo:

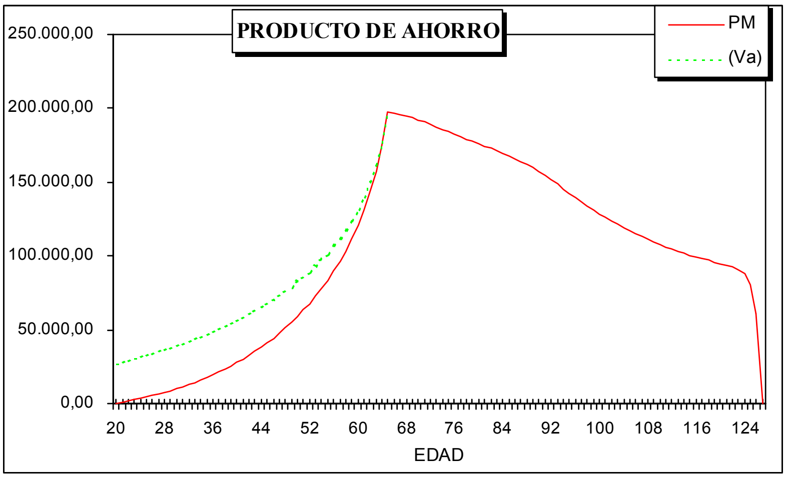
PM_{x_j} : Provisión matemática a la edad de jubilación.

$(Va)_{x_j}$: Valor actual actuarial de las prestaciones de jubilación a la edad de jubilación.

v^{h-x_j} : Valor de actualización financiero de h-x_j años.

${}_{h-x_j}p^m_{x_j}$: Probabilidad de que un beneficiario de la prestación de jubilación de edad x_j, alcance los h años, donde la única causa de salida es el fallecimiento.

GRÁFICO 1



En el gráfico 1 se observa que la provisión matemática sufre un incremento paulatino desde la edad en la que se efectúa la equivalencia financiero-actuarial (edad de entrada x_e =*20*, edad a partir de la cual abona las primas) hasta la edad en la que el partícipe va a empezar a recibir las prestaciones de jubilación (considerada en nuestro caso a los $x_j=65$ años) momento a partir del cual no se realiza ninguna otra aportación, debiendo tener en ese momento un montante máximo para hacer frente a todas las posibles futuras prestaciones (*Va)*.

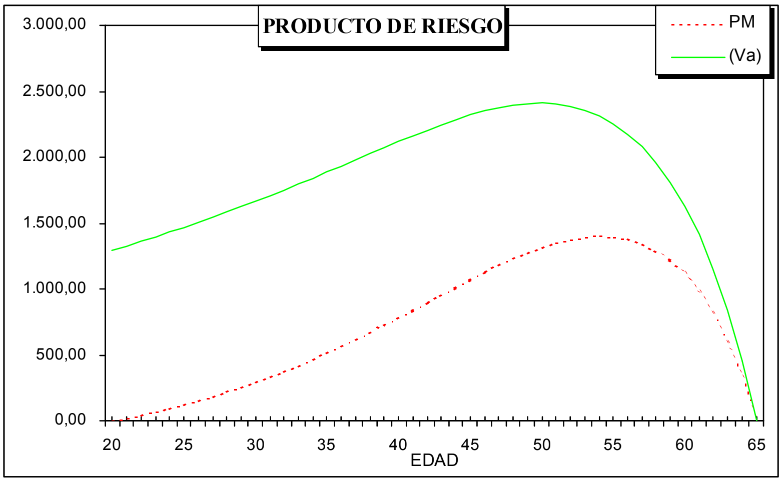
Es a partir de este momento cuando empieza el abono de las prestaciones prometidas y a medida que pasa el tiempo toma valores menores. En el tramo comprendido entre la edad de entrada y la edad de jubilación la provisión matemática se incrementa con mayor pendiente debido precisamente a las aportaciones periódicas que el tomador de seguro realiza.

Sin embargo, en el gráfico 2 para un seguro de riesgo entre los 20 años y los 65 si se contrata un producto actuarial de riesgo como puede ser el de abonar en forma de capital único una indemnización al fallecimiento del trabajador si ocurre con anterioridad a la edad de jubilación ($x_j=65$) de cuantía B, al alcanzar dicha edad de jubilación, el valor de las prestaciones futuras es también nulo, al no existir riesgo futuro de ocurrencia de la contingencia y siendo el valor de la provisión también nulo:

$$PM_{x_j} = (Va)_{x_j} = 0 \qquad [3]$$

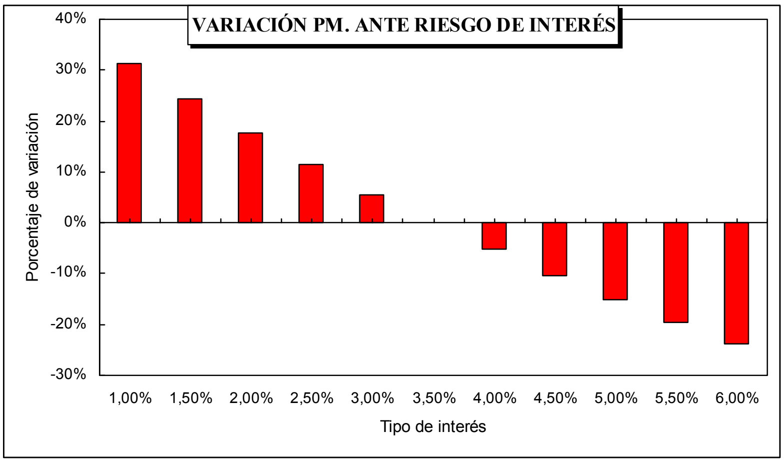
Sin embargo a una edad intermedia entre esa edad de entrada y la edad de jubilación, la provisión matemática toma valores positivos al contemplar tanto el riesgo que puede ocurrir como las aportaciones que todavía puede realizar el tomador del seguro.

GRÁFICO 2



Es precisamente el balance entre los compromisos periódicos de tanto el tomador del seguro como los compromisos de la entidad aseguradora los que delimitan el valor positivo de la provisión matemática a cada edad intermedia, creciendo inicialmente para tender a cero al ir acercándose al momento de extinción del contrato (inexistencia de riesgo).

GRÁFICO 3



De hecho, para un valor intermedio de la provisión matemática y, por ejemplo determinado bajo un tipo de interés del 3,5% anual (gráfico 3), una variación del tipo de interés al calcular el balance entre los derechos y obligaciones de tanto el tomador del seguro como de la empresa aseguradora, produce como repercusión un diferente valor de la provisión matemática a tener constituida por la compañía, por lo que además de ser importante la determinación de los compromisos asumidos por ambas partes, es vital la determinación de este tipo de interés pues concreta el nivel económico a tener respaldado financieramente por la cartera de activos financieros de la entidad aseguradora.

3.2. Cálculo

En el periodo comprendido entre estos dos extremos, la provisión matemática se puede expresar de diferentes formas, dependiendo del método de coste elegido para amortizar las prestaciones [De La Peña, 2000]. El cálculo de esta provisión es posible dependiendo de que se consideren las obligaciones futuras, tanto de la Entidad Aseguradora como del tomador del seguro, o las pasadas, donde se tienen en cuenta las aportaciones abonadas por estos últimos y el riesgo de ocurrencia de la prestación contemplada. Estos dos métodos son:

i) *Método Prospectivo*.

Quedará definida la provisión matemática calculada por el método prospectivo como el exceso del valor actual actuarial de las prestaciones futuras sobre las primas futuras actualizadas. Es el método que normalmente exige la administración para su cálculo y que adicionalmente está influenciado por el riesgo de interés.

$$PM_{x_a} = (Va)_{x_a} - (Cfa)_{x_a} \qquad [4]$$

siendo

PM_{x_a} : Provisión matemática calculada a la edad alcanzada.

$(Va)_{x_a}$: Valor actual actuarial a la edad alcanzada x_a de las prestaciones futuras a abonar al partícipe.

$(Cfa)_{x_a}$: Valor actual actuarial a la edad alcanzada x_a de las aportaciones futuras del partícipe.

ii) *Método Retrospectivo*.

La provisión matemática de un asegurado, por el método de cálculo retrospectivo, viene definida por la diferencia entre el montante de todas las aportaciones pasadas realizadas desde la edad de entrada en el colectivo, hasta el momento del cálculo de la provisión, aminorado por el riesgo o prestación consumida. Normalmente la cuota de aportación del año en curso queda excluida para el cálculo bajo la hipótesis habitual de primas prepagables.

$$PM_{x_a} = (Cps)_{x_a} - (Vps)_{x_a} \qquad [5]$$

donde

$(Cps)_{x_a}$: Cuotas pasadas capitalizadas actuarialmente hasta la edad de valoración de la provisión matemática.

$(Vps)_{x_a}$: Valor de las prestaciones pasadas capitalizadas hasta la edad de valoración de la provisión matemática.

Este es un valor pasado y calculado acorde a la experiencia real de la entidad, por lo que no está afectado por ningún riesgo de interés.

Dentro del cálculo de la provisión matemática se tiene en cuenta la edad de cada partícipe asegurado en la fecha a la que se refiere el cálculo (x), la prestación prometida a cada edad (B_x), el método de distribución de coste empleado (CA), las probabilidades de fallecimiento (q_x^m), invalidez (q_x^i), rotación (q_x^r), así como el tipo de interés (i) a utilizar en la valoración.

$$f(x; CA; B_x; q_x^m; q_x^i; q_x^r; i; ...) \qquad [6]$$

4. LOS COMPROMISOS ADQUIRIDOS VERSUS VALOR FINANCIERO DE LA PROVISIÓN MATEMÁTICA

En las operaciones de seguros de vida, el tipo de interés técnico es el utilizado para la realización de la equivalencia actuarial entre prestaciones y aportaciones, siendo posteriormente empleado para fijar las provisiones matemáticas. En muchos casos el valor máximo que puede tomar éste viene limitado legalmente. Esto es, tiene una estructura plana. Otras veces se emplea el tipo de interés libre de riesgo de los activos financieros del tesoro con el fin de ofertar el producto bajo un casamiento de flujos económicos que garanticen las prestaciones prometidas en la póliza de seguros. En el presente trabajo siempre se considera que cualquier cambio que ocurra en el tipo de interés producirá un desplazamiento paralelo de éste, tanto para la valoración del activo como del pasivo.

Hay que tener en cuenta que el valor actual de los flujos económicos del momento *inicial* considerado como el momento del contrato o suscripción de la póliza, ha de ser igual tanto para los ingresos probables futuros (I_h) como para los compromisos de pagos probables futuros (L_h). En esta equivalencia financiero-actuarial se delimita el valor de la prima que el tomador abonará a la Entidad Aseguradora. Bajo una estructura de tipos de interés periódicos cualesquiera, siendo ${}_h i_0$ el tipo de interés anual periódico al contado o *spot rate* hasta el periodo *h*-ésimo,

$$I(i)_0 = \sum_{h=0}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_0)^{-h} = \sum_{h=0}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_0)^{-h} = L(i)_0 \qquad [7]$$

siendo:

$I(i)_0$: Valor actual de las cuotas de aportación o ingresos que probablemente el asegurado abonará, valorados al tipo de interés de mercado.

$L(i)_0$: Valor actual de las cuotas de los compromisos de pago que probablemente se le abonarán al beneficiario correspondiente, valorados al tipo de interés de mercado.

n : Máxima temporalidad del abono de primas por parte del tomador del seguro.

s : Máxima temporalidad de la cobertura del seguro, donde $n \leq s$.

En esta equivalencia financiero-actuarial se delimita el valor de la prima que el tomador abonará a la Entidad Aseguradora.

4.1. Pagos probables futuros: Pasivo Actuarial

Los compromisos asumidos dependerán del tipo de producto comercializado. De esta forma si es un producto de riesgo en la que, por ejemplo, se abona una prestación al fallecimiento (B^m), el compromiso probable asumido a una edad x será:

$$L_x^m = \begin{cases} B_x^m & con\,una\ probabilidad\ de\ q_x^{(m)} \\ 0 & con\,una\ probabilidad\ de\ 1 - q_x^{(m)} \end{cases} \qquad [8]$$

si el abono de la prestación fuese a la invalidación,

$$L_x^i = \begin{cases} B_x^i & con\,una\ probabilidad\ de\ q_x^{(i)} \\ 0 & con\,una\ probabilidad\ de\ 1 - q_x^{(i)} \end{cases} \qquad [9]$$

Si el producto consiste en el abono de una prestación de ahorro pagadera a la edad x_j, el compromiso asumido sería:

$$L_x^j = \begin{cases} B_x & con\,una\ probabilidad\ de\ {}_{x_j - x_e}p_{x_e}^{(T)}\ si\quad x = x_j \\ 0 & si \qquad x < x_j \end{cases} \qquad [10]$$

siendo,

L_x^m : Compromiso probable asumido por fallecimiento a la edad x.

L_x^i : Compromiso probable asumido por invalidez a la edad x.

L_x^j : Compromiso probable asumido por jubilación a la edad x.

$q_x^{(m)}$: Probabilidad de fallecimiento a la edad x y para un periodo de un año.

$q_x^{(i)}$: Probabilidad de invalidación a la edad x y para un periodo de un año.

${}_{x_j - x_e}p_{x_e}^{(T)}$: Probabilidad de alcanzar la edad x_j para un asegurado de edad x_e y para todas las causas de salida contempladas.

4.2. Ingresos probables futuros: Activo Actuarial

Al realizar el contrato, el tomador del seguro se compromete a abonar la cuota de aportación o prima que corresponda siempre que no se dé la contingencia que le excluya del abono, como puede ser el fallecimiento, la invalidación, etc. En ese caso el ingreso probable a una edad x que ha de tener en cuenta la Entidad Aseguradora será:

$$I_x = \begin{cases} CA_x & \text{con una probabilidad de } p_x^{(T)} \\ 0 & \text{con una probabilidad de } 1 - p_x^{(T)} \end{cases} \qquad [11]$$

siendo,

I_x : Ingreso probable a tener en cuenta a la edad x.

CA_x : Cuota de aportación o prima periódica que ha de abonar el tomador del seguro a la edad x.

$p_x^{(T)}$: Probabilidad a la edad x de seguir siendo cotizante activo para un periodo de un año.

4.3. Balance financiero : La provisión matemática

En un momento intermedio el exceso del valor actual de los compromisos económicos sobre el valor actual de los ingresos probables por primas determinará el valor de mercado de la provisión matemática al tipo de interés i ($PM(i)_t$), o verdadero valor actual de los compromisos adquiridos para con el asegurado:

$$PM(i)_t = L(i)_t - I(i)_t = \sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+i)^{-h+t} - \sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+i)^{-h+t} \qquad [12]$$

Con una estructura de tipos de interés cualesquiera,

$$PM({}_h i_i)_t = \sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} - \sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} \qquad [13]$$

En este momento de tiempo intermedio se considera el valor actuarial de las cuotas de aportación futuras donde el tomador del seguro seguirá abonando la cuota que le corresponda siempre que se cumplan las condiciones que le permitan hacerlo, esto es, esté vivo, no inválido (dependiendo del condicionado de la póliza).

Es claro que en el caso de una prima única (único pago en el momento de la contratación) el valor de mercado de la provisión matemática coincide con el valor actual de los compromisos reales adquiridos.

$$L(i)_t = PM(i)_t \qquad [14]$$

Sin embargo, en caso de la existencia de aportaciones periódicas, los pagos probables se fundamentarán en la provisión acumulada hasta la fecha más las primas futuras que el asegurado debe abonar.

5. LA DURACIÓN ACTUARIAL

El concepto de duración de un activo financiero fue inicialmente introducido por *Macaulay* [Macaulay, 1938] bajo un enfoque financiero, así como por *Hicks* [Hicks, 1939] bajo una óptica económica. El desarrollo posterior se ha basado principalmente en el empleo de la Duración en el activo de la compañía aseguradora, esto es, en el análisis de las inversiones en renta fija, mayormente. De esta forma autores como *Bierwag y otros* [1977, 1978, 1990 y 1991], *Leibowitz* [1986, *a* y *b*] aplicándola a la inmunización, *Fabozzi* [1995], *Toevs* [1986] en la renta fija, etc., han desarrollado el empleo de la Duración en el activo pero no se ha ahondado en el campo del pasivo de la entidad aseguradora, salvo escasas intervenciones [*Li & Panjer*, 1994].

El concepto de Duración que se emplea para los activos financieros de renta fija se basa en una corriente de flujos económicos ciertos e invariables a lo largo del tiempo. Sin embargo en las operaciones actuariales la frecuencia de ocurrencia y el volumen de pago a realizar es estocástico. De hecho la mayoría de los seguros y rentas actuariales se basan en pagos a realizar ante la ocurrencia o no de un evento de muerte o supervivencia. Se parte de un modelo general en el que la cuantía y el tiempo se ven afectados por el momento del evento aleatorio. Queda determinada la expresión de la duración esperada (*DE*) de una operación contingente siguiendo a [De La Peña, 2002] bajo la siguiente expresión en el campo continuo,

$$DE = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot b_t \cdot v^t \cdot g(t) \cdot dt}{\int_0^{\infty} b_t \cdot v^t \cdot g(t) \cdot dt} \qquad [15]$$

siendo,

b_t : Pago a realizar en el instante *t* al darse la contingencia.

v^t : Factor de actualización financiero desde el instante *t* hasta el origen.

$g(t)$: Función de densidad correspondiente a la función de distribución $G_x(t)$ de distribución por edad, la cual nos indicará la distribución por edad de la población a medida que el tiempo pasa.

En el presente trabajo se empleará su equivalente en el campo discreto, donde son los flujos económicos dependientes de las probabilidades de ocurrencia correspondientes a la modalidad y cobertura de producto actuarial contratado:

$$DE = \frac{\sum_{h=t+1}^{s} (h-t) \cdot L_h \cdot (1+i)^{-h+t}}{\sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+i)^{-h+t}} \qquad [16]$$

para una estructura de interés técnico plana y para una estructura cualesquiera, su expresión viene dada a través de la duración esperada modificada (*DEM*):

$$DEM = -\frac{\sum_{h=t+1}^{s} (h-t) \cdot L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-1}}{\sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t}} \qquad [17]$$

6. SENSIBILIDAD DE LA PROVISIÓN MATEMÁTICA ANTE EL TIPO DE INTERÉS

En un momento intermedio *t*-ésimo, el valor financiero de la provisión matemática calculada por el método prospectivo viene indicada tal y como se ha apuntado anteriormente:

$$PM({}_h i_t)_t = L({}_h i_t)_t - I({}_h i_t)_t \qquad [18]$$

Esto es, en función de cada uno de sus componentes:

$$PM({}_h i_t)_t = \sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} - \sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} \qquad [19]$$

Dado este valor financiero de la provisión en una fecha dada, si existe una mínima variación en el tipo de rentabilidad de mercado (*e*), el valor de las obligaciones asumidas cambiará a $PM(i+e)_t$. En este caso, se puede encontrar su nuevo valor mediante una aproximación de MacLaurin para tres términos, donde la función es $PM(i+e)_t$. En el límite a cero de ese valor incremental se tiene,

$$PM({}_h i_t + e)_t = PM({}_h i_t)_t + \frac{\partial\, PM({}_h i_t)_t}{\partial d\ {}_h i_t} \cdot e + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\ PM({}_h i_t)_t}{\partial\ {}_h i_t^{\,2}} \cdot e^2$$

[20]

6.1. A través de la Duración esperada

Para determinar el efecto que produce una variación del tipo de interés sobre la provisión matemática de la entidad aseguradora se debe estudiar el efecto que produce el cambio del tipo de interés en cada uno de los componentes que determinan el valor financiero de la provisión matemática:

$$\frac{\partial PM(i)_t}{\partial i} = \frac{\partial \left(L(i)_t - I(i)_t \right)}{\partial i} = \\ = \frac{\partial \left(\sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+i)^{-h+t} \right)}{\partial i} - \frac{\partial \left(\sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+i)^{-h+t} \right)}{\partial i} \qquad [21]$$

con lo cual se desarrolla (véase anexo 11.1.) separadamente la influencia que las variaciones del tipo de interés tienen sobre los compromisos de pago y sobre los ingresos probables, llegando a la expresión que permite determinar de forma aproximativa el nuevo valor de esta provisión cuando las variaciones son instantáneas y paralelas :

$$PM({}_h i_t + e)_t = L({}_h i_t)_t \cdot \left\lfloor 1 + e \cdot DEM_{L_t} \right\rfloor - I({}_h i_t)_t \cdot \left\lfloor 1 + e \cdot DEM_{I_t} \right\rfloor \qquad [22]$$

6.2. A través de la Duración y Convexidad esperada

La convexidad esperada (*CXE*) trata de recoger la parte de la variación en el valor actual de los compromisos probables de pago asumidos producido por una variación en el tipo de interés y que no haya sido captado por la duración esperada.

Para obtener una mayor exactitud de la variación que experimentan los pagos por prestaciones prometidas ante variaciones del tipo de interés, se considera un parámetro que *nos indica la dispersión de aquel frente a éste*. Es el término de convexidad esperada de las operaciones actuariales, sensiblemente diferente a su homónimo convexidad de un título [*Li & Panjer*, 1994]. La convexidad esperada viene definida a través del tercer término del desarrollo de MacLaurin.

El parámetro convexidad esperada se utiliza para describir esta dispersión, siendo la derivada de segundo orden en la aproximación de MacLaurin. Empleando el mismo razonamiento que el expuesto en el subepígrafe anterior se alcanza la siguiente expresión (véase anexo11.2.),

$$PM({}_h i_t + e)_t = L({}_h i_t)_t \cdot \left[1 + e \cdot DEM_{L_t} + \frac{e^2}{2} \cdot CXEM_{L_t} \right] - \\ - I({}_h i_t)_t \cdot \left[1 + e \cdot DEM_{I_t} + \frac{e^2}{2} \cdot CXEM_{I_t} \right] \quad [23]$$

Donde el valor que toma la convexidad esperada modificada para los pagos probables asumidos en la cartera de seguros asciende a:

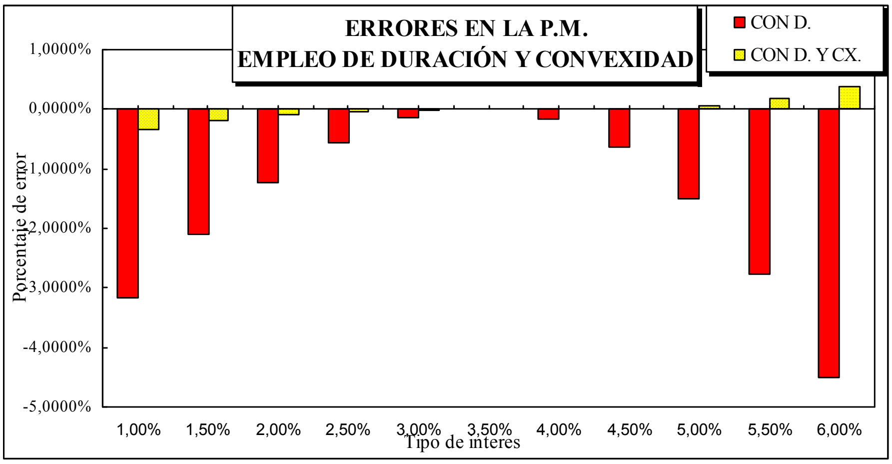
$$CXE_{L_t} = \frac{\sum_{h=t+1}^{s} (h-t+1)^2 \cdot L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-2}}{L({}_h i_t)_t} \quad [24]$$

Y la convexidad de los ingresos probables que deben hacer los tomadores del seguro es:

$$CXEM_{I_t} = \frac{\sum_{h=t+1}^{n} (h-t+1)^2 \cdot I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-2}}{I({}_h i_t)_t} \quad [25]$$

De la descripción realizada hasta ahora se deduce que el efecto corrector de la convexidad sobre el valor de las obligaciones asumidas calculado a través de la duración esperada, es positivo ante bajadas del tipo de interés. Si el interés desciende, el aumento del valor de estos pagos es mayor que el estimado únicamente con la duración esperada. Si el interés aumenta, el descenso final es mayor al estimado con la duración esperada.

GRÁFICO 4



De hecho, para una provisión matemática determinada con un tipo de interés del 3,5% (gráfico 4), el empleo de tanto la duración y la convexidad para valorar la nueva provisión matemática ante variaciones en el tipo de interés, como se puede apreciar en el gráfico, permite aproximaciones realmente buenas, para, por ejemplo un producto a prima periódica a abonar a un plazo de 10 años.

7. LA INMUNIZACIÓN ABIERTA

7.1. Definición

La inmunización abierta consiste en la creación de una *cartera de inversiones de activos financieros de renta fija de forma que junto con las aportaciones o ingresos futuros se generen los suficientes flujos económicos para que se haga frente a un único pago futuro o varios, independientemente de las variaciones del tipo de interés de mercado*.

7.2. Inmunización abierta y simple

Inicialmente (momento del contrato), existirá una equivalencia entre el valor actual del compromiso a asumir y las cuotas a abonar por el tomador del seguro:

$$L_H \cdot (1+{}_H i_0)^{-H} = \sum_{h=0}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_0)^{-h} \qquad [26]$$

donde
L_H : Compromiso probable asumido a abonar en el momento H-ésimo.

Lo cual implica la existencia de una provisión matemática nula

$$PM({}_h i_0)_0 = 0 \qquad [27]$$

Pero en un momento intermedio, t, el balance entre ambos conceptos valorados acorde al tipo de interés vigente en ese momento delimitará el valor de la provisión matemática, el cual debe estar al menos respaldado por el valor actual de las inversiones de las cuotas recaudadas

$$PM({}_h i_t)_t = L_H \cdot (1+{}_H i_0)^{-H+t} - \sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} \leq A({}_h i_t)_t \qquad [28]$$

Esto es,

$$L({}_h i_t)_t - I({}_h i_t)_t \leq A({}_h i_t)_t \qquad [29]$$

luego,

$$L({}_h i_t)_t \leq A({}_h i_t)_t + I({}_h i_t)_t \qquad [30]$$

los compromisos asumidos por la entidad aseguradora deben estar al menos cubiertos por las inversiones ya realizadas $\left(A({}_h i_t)_t\right)$ y materializadas en el fondo de inversión correspondiente y el valor actual de los ingresos probables pendientes de recibir ($I({}_h i_t)_t$). De esta forma, siguiendo a Redington, para estar inmunizado ante el riesgo de interés se deben dar igualdad de duraciones del activo (en este caso duraciones modificadas, al contemplar una estructura de tipos de interés no plana), tanto financiero como actuarial (DM_{ACTIVO}) con el pasivo actuarial, que en una inmunización simple es el horizonte de planificación del inversor:

$$DM_{ACTIVO} = DEM_{L} = \frac{(H-t)\cdot L_{H}\cdot(1+_{H}i_{0})^{-H+t-1}}{L_{H}\cdot(1+_{H}i_{t})^{-H+t}} = (H-t)\cdot(1+_{H}i_{0})^{-1}$$

[31]

Siendo la duración del activo la duración media ponderada de los activos financieros y actuariales que la comprenden.

$$DEM_{ACTIVO} = \frac{I(_{h}i_{t})_{t}}{L(_{h}i_{t})_{t}}\cdot DEM_{I_t} + \frac{A(_{h}i_{t})_{t}}{L(_{h}i_{t})_{t}}\cdot DM_{A_t} \qquad [32]$$

Gráficamente los flujos económicos que componen esta cartera son:

	I_{t+1}		I_{t+2}	$\ldots$	I_{H-1}
	F^{1}_{t+1}		F^{1}_{t+2}	$\ldots$	F^{1}_{H-1}
F^{1}_{H}	$\ldots$	F^{1}_{n}			
t	*t+1*		*t+2*	...	*H-1*
H	...	*n*			

Donde F^{1}_{h} representa el flujo económico *h*-ésimo producido por la inversión realizada con la cuota inicialmente recaudada CA_t. La duración modificada de estos flujos de ingresos vendrá dada como:

$$DM_{ACTIVO} = -\frac{\sum_{h=t+1}^{n}(h-t)\cdot F_{h}\cdot(1+_{h-t}i_{t})^{-h+t-1}}{\sum_{h=t+1}^{n}F_{h}\cdot(1+_{h-t}i_{t})^{-h+t}} \qquad [33]$$

Hay que tener en cuenta que el valor actual de los flujos económicos del momento *t*-ésimo ha de ser igual, tanto para los ingresos como para los pagos:

$$\sum_{h=t+1}^{n}\left(F^{i}_{h}+I_{h}\right)\cdot(1+_{h-t}i_{t})^{-h+t} = L_{H}\cdot(1+_{H-t}i_{t})^{-H+t} \qquad [34]$$

Por lo que el numerador de la duración queda indicada como,

$$DM_{ACTIVO} = \frac{\sum_{h=t+1}^{n}(h-t)\cdot F_h^1 \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-1}}{L({}_h i_t)_t} + \frac{\sum_{h=t+1}^{H-1}(h-t)\cdot I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-1}}{L({}_h i_t)_t}$$

[35]

Esto es,

$$DEM_{ACTIVO} = \frac{A({}_h i_t)_t}{L({}_h i_t)_t}\cdot DM_{A_t} + \frac{I({}_h i_t)_t}{L({}_h i_t)_t}\cdot DEM_{I_t} = (H-t)\cdot(1+{}_H i_0)^{-1}$$

[36]

La duración a la que se deberá estructurar la cartera de inversiones de la Entidad Aseguradora deberá ser:

$$DM_{A_t} = (H-t)\cdot(1+{}_H i_0)^{-1}\cdot\frac{L({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} - DEM_{I_t}\cdot\frac{I({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} \qquad [37]$$

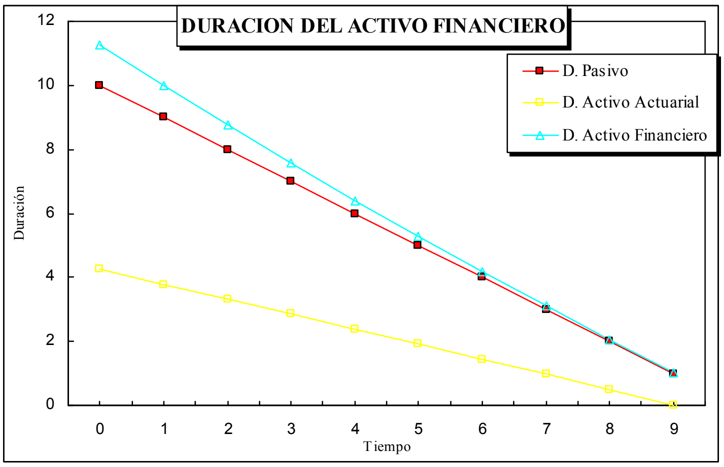
Teniendo en cuenta los ingresos probables futuros del tomador (primas periódicas pendientes de abonar según contrato), la inversión inicial de la primera prima recaudada se realizará a una duración superior al horizonte de planificación del inversor. Las siguientes contribuciones al fondo se irán reinvirtiendo a duraciones mayores que el horizonte de planificación, de forma que junto con la duración de la corriente de ingresos probables por primas abonadas y reinvertidas tengan una duración media igual a ese horizonte de planificación.

Por tanto, el mismo producto actuarial indica cuál es la duración a la que se deben estructurar las inversiones de la cartera de activos financieros de la Entidad Aseguradora.

Además, de esta forma, al final del primer ejercicio una bajada de los tipos de interés producirá un valor de reinversión menor. Sin embargo el valor de mercado se incrementará y se llegará a acumular el suficiente importe económico como para hacer frente al pago previsto.

En el gráfico 5 se puede observar que para un producto a 10 años, desde que se contrata éste y para cualquier periodo posterior, la duración a la que se debe estructurar la cartera de inversiones es siempre mayor al horizonte temporal (plazo de tiempo restante hasta el momento en el que se vaya a realizar el pago probable futuro. La razón estriba en la duración de los ingresos probables de se tendrán en esos años futuros y la hipótesis de duraciones totales iguales (tanto de los activos financieros y actuariales con los pasivos u obligaciones), que, al ser menor que ese periodo de planificación del inversor, al ponderarlos acorde a la fórmula [37] resulta una duración de los activos financieros mayores.

GRÁFICO 5



Adicionalmente si se tiene en cuenta la convexidad total, el propio producto actuarial determinará la convexidad que debe tener la estructura invertida de títulos, teniendo también en cuenta la convexidad esperada de tanto los compromisos asumidos como del activo actuarial o futuros ingresos probables por las primas a recaudar. Si se emplea el mismo desarrollo que el empleado para determinar la duración de la cartera de inversiones se determina que la convexidad a la que se deberá estructurar la cartera de inversiones de la Entidad Aseguradora deberá ser:

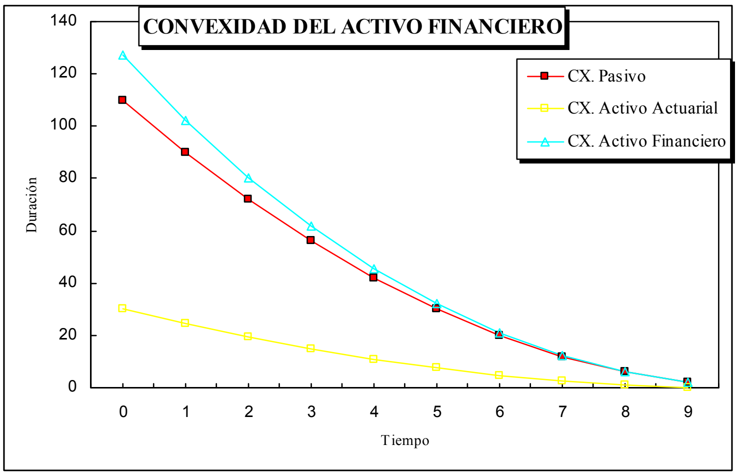
$$CXM_{A_t} = (H-t)\cdot(H-t+1)\cdot(1+{}_H i_0)^{-2}\cdot\frac{L({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} - CXEM_{I_t}\cdot\frac{I({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t}$$

[38]

La menor dispersión del abono periódico de primas periódicas frente a la dispersión o convexidad de los compromisos asumidos hace que la estructuración se realice en títulos con un grado de dispersión o convexidad en cada período superior al del pasivo asumido. Por tanto, el mismo producto actuarial también indica cuál es la convexidad a la que se deben estructurar las inversiones de la cartera de activos financieros de la Entidad Aseguradora.

Gráficamente el resultado es el mismo y su razonamiento análogo. En el gráfico 6 se puede observar que para un producto a 10 años, desde que se contrata éste y para cualquier periodo posterior, la convexidad a la que se debe estructurar la cartera de inversiones es siempre mayor a la convexidad esperada del pasivo. La razón estriba en la convexidad esperada de los ingresos probables de se tendrán en esos años futuros, que, al ser menor en ese periodo a la convexidad de los pasivos, al ponderarlos acorde a la fórmula [38] resulta una convexidad de los activos financieros mayor.

GRÁFICO 6



7.3. Inmunización abierta y múltiple

Esta estrategia se puede extender también a una inmunización múltiple en cuyo caso la principal variación con respecto a las expresiones anteriores radica en la consideración de la duración esperada de la estructura de compromisos adquiridos donde inicialmente (momento del contrato), existirá una equivalencia entre el valor actual de los compromisos a asumir y las cuotas a abonar por el tomador del seguro. En un momento intermedio, *t*, el balance entre ambos conceptos valorados acorde al tipo de interés vigente en ese momento delimitará el valor de la provisión matemática, el cual debe estar al menos respaldado por las inversiones de las cuotas de aportación recaudadas

$$PM({}_h i_t)_t = \sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} - \sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t} \leq A({}_h i_t)_t \qquad [39]$$

Esto es,

$$L({}_h i_t)_t \leq A({}_h i_t)_t + I({}_h i_t)_t \qquad [40]$$

los compromisos asumidos por la entidad aseguradora deben estar al menos cubiertos por las inversiones ya realizadas y materializadas en el fondo de inversión correspondiente y el valor actual de los ingresos probables pendientes de recibir.

La estrategia inmunizadora múltiple consistirá en la igualación de duraciones (modificadas para la estructura de tipos de interés no plana que se esta suponiendo a lo largo del presente trabajo) de tanto el activo financiero como actuarial con la duración esperada de los compromisos asumidos o pasivo actuarial:

$$DM_{ACTIVO} = DEM_L = -\frac{\sum_{h=t+1}^{s} (h-t) \cdot L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-1}}{\sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t}} \qquad [41]$$

Siendo la duración del activo la duración media ponderada de los activos financieros y actuariales que la comprenden.

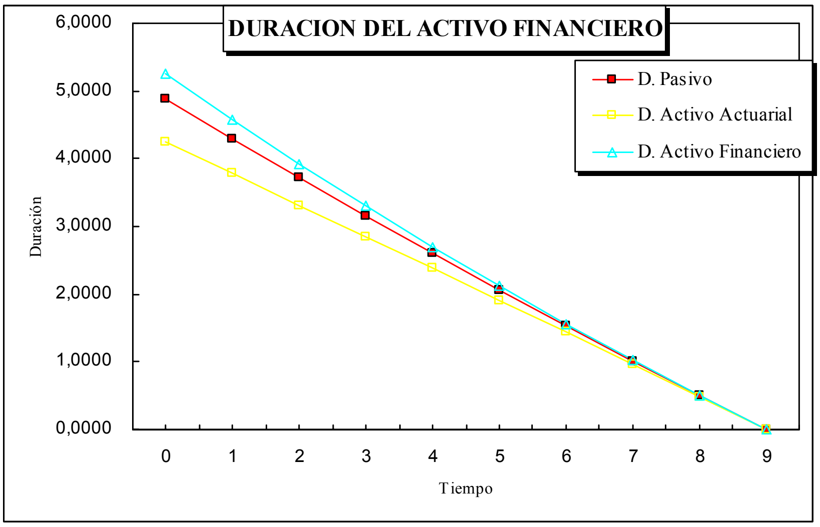
$$DEM_{ACTIVO} = \frac{I({}_h i_t)_t}{L({}_h i_t)_t} \cdot DEM_{I_t} + \frac{A({}_h i_t)_t}{L({}_h i_t)_t} \cdot DM_{A_t} = DEM_L \qquad [42]$$

Por lo que la duración a la que debe estructurarse las inversiones del fondo de la Entidad Aseguradora será:

$$DM_{A_t} = \frac{L({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} \cdot DEM_{L_t} - \frac{I({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} \cdot DEM_{I_t} \qquad [43]$$

Se puede apreciar que también con la inmunización múltiple la cartera de inversiones debe estructurarse a una duración superior a la duración esperada de los compromisos múltiples asumidos de forma que la duración media conjunta de tanto el activo financiero como actuarial sea igual a la duración esperada de estos compromisos.

GRÁFICO 7

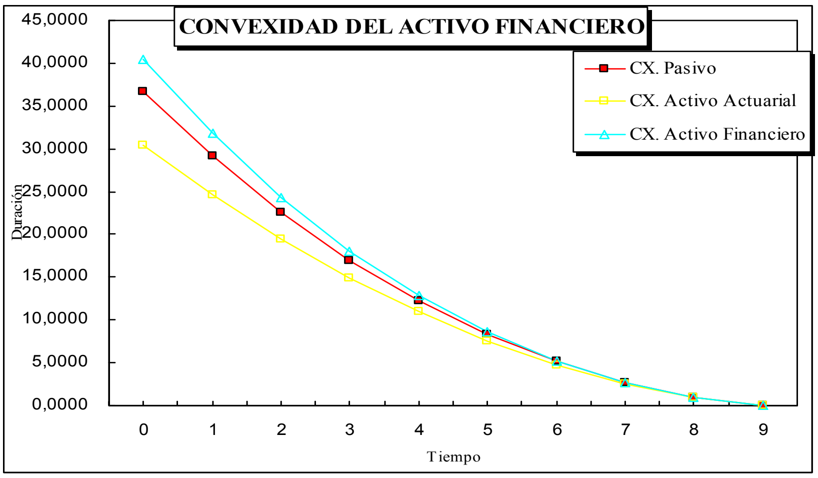


En el gráfico 7 se puede observar que para un producto de riesgo a 10 años, desde que se contrata éste y para cualquier periodo posterior, la duración a la que se debe estructurar la cartera de inversiones es siempre mayor a la duración de los pasivos. La razón estriba en la duración de los ingresos probables de se tendrán en esos años futuros y la hipótesis de duraciones totales iguales (tanto de los activos financieros y actuariales con los pasivos u obligaciones), que, al ser menor que esa duración esperada de los pasivos, al ponderarlos acorde a la fórmula [43] resulta una duración de los activos financieros ligeramente mayor.

Si se tiene en cuenta la convexidad total, el propio producto actuarial también nos determinará la convexidad que debe tener la estructura invertida de títulos, teniendo también en cuenta la convexidad esperada de tanto los compromisos asumidos como del activo actuarial o futuros ingresos probables por las primas a recaudar. Empleando el mismo desarrollo que el empleado para determinar la duración de la cartera de inversiones se obtiene que la convexidad a la que se deberá estructurar la cartera de inversiones de la Entidad Aseguradora deberá ser:

$$CXM_{A_t} = \frac{L({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} \cdot CXEM_{L_t} - \frac{I({}_h i_t)_t}{A({}_h i_t)_t} \cdot CXEM_{I_t} \qquad [44]$$

GRÁFICO 8



En el gráfico 8 también se obtiene para todos los periodos y para el producto de riesgo a 10 años, que desde que se contrata éste y para cualquier periodo posterior, la convexidad a la que se debe estructurar la cartera de inversiones es siempre mayor a la convexidad de los pasivos. La razón estriba en la convexidad de los ingresos probables que se tendrán en esos años futuros que, al ser menor que esa convexidad esperada de los pasivos, al ponderarlos acorde a la fórmula [44] resulta una convexidad de los activos financieros ligeramente mayor.

8. APLICACIÓN

Con el fin de ilustrar las condiciones necesarias para aplicar una estrategia inmunizadora a productos actuariales a prima periódica, se procede a realizar una aplicación a dos productos, uno de ahorro y otro de riesgo.

Para el producto de ahorro se considera el abono de un capital de *10.000 €* a los 60 años si el tomador del seguro, de 55 años alcanza dicha edad sin fallecer ni invalidarse. Considerando estas dos causas de salida (GRM-95 para fallecimiento y EVKM-90 para invalidación) y bajo la garantía del tipo de interés libre de riesgo existente en ese momento en el mercado (31 de enero de 2003) que asciende al

$$ {}_5i_0 = 3,3672\% $$

Esta garantía es contratada a los 55 años de edad por un asegurado, el cual abona primas anuales constantes a 5 años, siendo el valor de éstas:

$$ CA_{55} = 1.691,18 \ € $$

El producto de riesgo considera el abono de una indemnización al fallecimiento a abonar si ocurre antes de que el asegurado cumpla los 65 años de edad.

$$ B = 100.000 \ € $$

La entidad asegura la estructura de tipos de interés vigentes a la fecha, cuyo valor anual dependiendo del plazo *h* asciende a:

Plazo	${}_{h}i_{0}$
1	2,4990%
2	2,5917%
3	2,9520%
4	3,0851%
5	3,3672%

y considera como causas de salida el fallecimiento (GRM-95) e invalidez (EVKM-90). Esta es contratada a los 55 años de edad por un asegurado, el cual abona primas anuales constantes siendo la primera prima:

$$CA_{55} = 1.608,09\ €$$

Se analiza la situación de estos productos actuariales a prima periódica (Tabla 1) cuando el asegurado tiene 55 años y una vez han suscrito la póliza, esto es tras haber abonado la primera cuota:

TABLA 1

PRODUCTO DE AHORRO		**PRODUCTO DE RIESGO**	
$L(i)_{55}=$	*7.781,25 €*	$L(i)_{55}=$	*7.398,95 €*
$I(i)_{55}=$	*6.090,07 €*	$I(i)_{55}=$	*5.790,86 €*
$PM(i)_{55}=$	*1.691,18 €*	$PM(i)_{55}=$	*1.608,09 €*

En ambos casos se puede observar que el compromiso asumido ($L(i)_{55}$) es mayor que la provisión matemática ($PM(i)_{55}$) o fondo idóneo que debe tener constituida la Entidad Aseguradora para acometer ese compromiso.

TABLA 2

PRODUCTO DE AHORRO		PRODUCTO DE RIESGO	
DE_L =	4,0989	DE_L =	2,7869
CXE_L =	23,7925	CXE_L =	12,9337
DE_I =	2,3704	DE_I =	2,3704
CXE_I =	8,0934	CXE_I =	8,0934

En la Tabla 2 se obtiene que lógicamente el producto de ahorro conlleva una duración y convexidad mayor en los compromisos asumidos que las que corresponden a los ingresos probables por primas.

Bajo una hipótesis de que la provisión matemática se encuentra íntegramente constituida, esto es, respaldada financieramente por las inversiones que va a realizar en cada año la Entidad Aseguradora, en las siguientes tablas se indicará la evolución que experimenta cada producto hasta la extinción del contrato. Para el producto de ahorro, en la tabla 3,

TABLA 3

t	$L(i)_t$	$I(i)_t$	$PM(i)_t$	$A(i)_t$
0	7.781,25	6.090,07	1.691,18	1.691,18
1	8.070,99	4.625,65	3.445,34	3.445,34
2	8.403,68	3.125,15	5.278,54	5.278,54
3	8.857,02	1.602,55	7.254,47	7.254,47
4	9.346,88	0,00	9.346,88	9.346,88

Y a la hora de estructurar las inversiones, la cartera financiera deberá tomar una duración y convexidad en cada año futuro expuesto en la tabla 4:

TABLA 4

	Duración esperada modificada del pasivo	*Convexidad esperada modificada del pasivo*	*Duración esperada modificada del activo actuarial*	*Convexidad esperada modificada del activo actuarial*	*Duración esperada modificada del activo financiero*	*Convexidad esperada modificada del activo financiero*
t	DEM_{L_t}	$CXEM_{L_t}$	DEM_{I_t}	$CXEM_{I_t}$	DM_{A_t}	CXM_{A_t}
0	4,0989	23,7925	2,3704	8,0934	**10,3235**	**80,3262**
1	3,8615	18,6394	1,9048	6,0952	**6,4887**	**35,4810**
2	2,8877	11,1187	1,4347	3,6763	**3,7480**	**15,5250**
3	1,9232	5,5481	0,9663	1,8675	**2,1346**	**6,3611**
4	0,9569	1,8313	0,0000	0,0000	**0,9569**	**1,8313**

Los resultados para el producto de riesgo en la tabla 5 son,

TABLA 5

t	$L(i)_t$	$I(i)_t$	$PM(i)_t$	$A(i)_t$
0	7.398,95	5.790,86	1.608,09	1.608,09
1	6.479,76	4.398,39	2.081,37	2.081,37
2	5.346,82	2.971,61	2.375,22	2.375,22
3	3.978,17	1.523,82	2.454,36	2.454,36
4	7.398,95	5.790,86	1.608,09	1.608,09

Y a la hora de estructurar las inversiones, la cartera financiera deberá tomar una duración y convexidad en cada año futuro, expuesto en la tabla 6:

TABLA 6

	Duración esperada modificada del pasivo	*Convexidad esperada modificada del pasivo*	*Duración esperada modificada del activo actuarial*	*Convexidad esperada modificada del activo actuarial*	*Duración esperada modificada del activo financiero*	*Convexidad esperada modificada del activo financiero*
t	DEM_{L_t}	$CXEM_{L_t}$	DEM_{I_t}	$CXEM_{I_t}$	DM_{A_t}	CXM_{A_t}
0	2,7869	12,9337	2,3704	8,0934	**4,2869**	**30,3640**
1	2,5621	10,1886	1,9048	6,0952	**3,9513**	**18,8388**
2	2,0042	6,5597	1,4347	3,6763	**2,7167**	**10,1672**
3	1,4727	3,8154	0,9663	1,8675	**1,7872**	**5,0248**
4	0,9569	1,8313	0,0000	0,0000	**0,9569**	**1,8313**

9. COMENTARIOS FINALES

- Los postulados generales de inmunización clásica deben ser adaptados en vista a encaminar a una correcta estrategia inversora para productos actuariales a prima periódica.

- Es una realidad que en muchos casos los productos de la compañía aseguradora se comercializan a través de un tipo de interés técnico constante, limitado legalmente y que los cambios de éste son cambios instantáneos y paralelos. No obstante también es posible el empleo de la estructura de tipos de interés de mercado, bajo la hipótesis de desplazamientos paralelos de esta estructura.

- Se debe proceder a estimar el activo actuarial en la estrategia inversora, pues al fin y al cabo son unos ingresos que contractualmente va a recibir la entidad en caso de no darse la contingencia contemplada en el contrato de seguro correspondiente.

- El flujo de ingresos probables definidos en el contrato nos delimitará una duración de éstos que influirá en la duración conjunta del programa lineal de la estrategia inmunizadora.

- La duración a la que se debe estructurar la cartera de inversiones dependerá no sólo de la duración del activo actuarial, sino también del valor actual de tanto los ingresos probables futuros como los compromisos probables futuros ponderados sobre el valor de, precisamente la cartera de inversiones correspondiente. Esto hará que esta duración de la cartera de inversiones haya de ser mayor a la duración de los compromisos adquiridos. En periodos posteriores, las siguientes contribuciones al fondo se irán reinvirtiendo a duraciones mayores que el horizonte de planificación, de forma que junto con la duración de la corriente de ingresos probables por primas abonadas y reinvertidas tengan una duración media igual a ese horizonte de planificación.

- Idéntica conclusión se obtiene para el análisis de la convexidad de la cartera de inversiones, donde también los ingresos probables futuros del producto a prima periódica nos delimitará un grado de dispersión de éstos y que la cartera de inversiones también debe tener en cuenta. La menor dispersión del abono periódico de primas periódicas frente a la dispersión o convexidad de los compromisos asumidos hace que la estructuración se realice en títulos con un grado de dispersión o convexidad en cada período superior al del pasivo asumido.

10. BIBLIOGRAFÍA

Bader, Lawrence N. (1.985) Actuarial Implications of Dedicated Pension Funds. *Transactions of the Society of Actuaries,* Vol. XXXV, Chicago.

Betzuen Zalbidegoitia, Amancio Y Blanco Ibarra, Felipe (1.989) *Planes y Fondos de Pensiones: Su cálculo y valoración*. Ediciones Deusto, Bilbao.

Bierwag, George O. (1.977) Immunization, Duration and the Structure of Interest Rate. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, diciembre, Washington.

Kaufman George G. And Khang Chulsoon (1.978) Duration and Bond Portfolio Analysis; an Overview. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, noviembre, Washington.

Charles J. Corrado And George G. Kaufman (1.990) Computing durations for bond portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, Fall, New York.

(1.991) *Análisis de la duración. La gestión del riesgo de tipo de interés.* Ed. Alianza Economía y Finanzas. Madrid.

De La Peña, J. Iñaki, (1.997) El riesgo de interés en seguros y pensiones: una aproximación actuarial. Primer Premio exaequo 10º Colloquiumm Internacional de Barcelona. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 3ª época, Nº 2, pp. 49-172. Madrid.

(2.000*).Planes de Previsión Social.* Ed. Pirámide. Madrid.

(2.002*).* Riesgo de interés de las operaciones actuariales clásicas: un análisis a través de la duración. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 3º época, Nº 7, págs. 135-168.Madrid.

Fabozzi, Frank J. Y Fabozzi, T. Dessa (1.995) *The Handbook of Fixed Income Securities*, (4ª edición) Irwin Inc. New York.

Fisher, L & Weil, R.L. (1.971). Coping with the risk of interest rates fluctuations: Returns to bondholders from Naïve and Optimal Strategies. *Journal of Bussines*, Octubre.
Hicks, J.R. (1.939) *Value and Capital*. Claredon Press.Oxford.
Leibowitz, Martin L. (1.986 a) The Dedicated Bond Portfolio in Pension Funds, Part I: Motivations and Basics. *The Financial Analysts Journal* de Enero-Febrero, Virginia.
(1.986 b) The Dedicated Bond Portfolio in Pension Funds, Part II: Immunization, Horizon Matching and Contingent Procedures. *The Financial Analysts Journal* de Marzo-Abril, Virginia.
Li, David X. & Panjer, Harry H. (1.994). Immunization Measures for Life Contingences. *The Procedings of the fourth AFIR International Colloquium*, Orlando.
Macaulay, F. (1.938) The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stocks Prices in United States since 1.856. *National Bureau of Economic Research*, New York.
Redington, F.M. (1.952) Review of the Principles of Life-Office Valuation. *The Journal of the Institute of Actuaries*, 18, London.
Toevs, Alden L. (1.986). Uses of Duration Analysis for the Control of Interest Rate Risk. en Platt, R.B. *Controlling Interest Rate Risk*, John Willey & Sons, Inc., New York.

11. ANEXO

Partiendo de la aproximación de MacLaurin para tres términos, donde la función es $PM({}_h i_t + e)_t$. En el límite a cero de ese valor incremental se tiene,

$$PM({}_h i_t + e)_t = PM({}_h i_t)_t + \frac{\partial\, PM({}_h i_t)_t}{\partial d \;\; {}_h i_t} \cdot e + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \; PM({}_h i_t)_t}{\partial \;\; {}_h i_t^{\,2}} \cdot e^2 \qquad [45]$$

11.1. Expresión a través de la Duración esperada

A través de la primera derivada de la provisión matemática con respecto al tipo de interés:

$$\frac{\partial PM({}_h i_t)_t}{\partial_h i_t} = \frac{\partial\left(L({}_h i_t)_t - I({}_h i_t)_t\right)}{\partial_h i_t} =$$
$$= \frac{\partial\left(\sum_{h=t+1}^{s} L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t}\right)}{\partial_h i_t} - \frac{\partial\left(\sum_{h=t+1}^{n} I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t}\right)}{\partial_h i_t} \quad [46]$$

Se procede a desarrollar separadamente la influencia que las variaciones del tipo de interés tienen sobre los compromisos de pago y sobre los ingresos probables:

$$\frac{\partial PM({}_h i_t)_t}{\partial_h i_t} = -\sum_{h=t+1}^{s}(h-t)\cdot L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-1} + \sum_{h=t+1}^{n}(h-t)\cdot I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-1} \quad [47]$$

La variación que experimenta el valor de la provisión matemática cuando el tipo de interés varía de ${}_h i_t$ a ${}_h i_t + e$ vendrá dada por:

$$\Delta = \frac{PM({}_h i_t + e)_t - PM({}_h i_t)_t}{PM({}_h i_t)_t} = \frac{\dfrac{\partial PM({}_h i_t)_t}{\partial_h i_t}}{PM({}_h i_t)_t} \quad [48]$$

Luego, sustituyendo y operando convenientemente, se alcanza una expresión:

$$\Delta = e \cdot \frac{1}{PM({}_h i_t)_t} \cdot \left[DEM_{L_t} \cdot L({}_h i_t)_t - DEM_{I_t} \cdot I({}_h i_t)_t\right] \quad [49]$$

que también puede escribirse como:

$$\Delta = e \cdot \left[DEM_{L_t} \cdot \frac{L({}_h i_t)_t}{PM({}_h i_t)_t} - DEM_{I_t} \cdot \frac{I({}_h i_t)_t}{PM({}_h i_t)_t}\right] \quad [50]$$

lo cual significa que la variación que experimente la provisión matemática de una operación actuarial de prima periódica dependerá de las duraciones esperadas de tanto los compromisos como de los ingresos probables del contrato, ponderados con el peso que represente cada uno de ellos sobre la provisión matemática originaria.

El nuevo valor que tomará la provisión cuando el tipo de interés varíe a i+e será:

$$\begin{aligned} PM({}_h i_t + e)_t &= PM({}_h i_t)_t + PM({}_h i_t)_t \cdot \Delta \\ &= PM({}_h i_t)_t + e \cdot \left[DEM_{L_t} \cdot L({}_h i_t)_t - DEM_{I_t} \cdot I({}_h i_t)_t \right] \end{aligned}$$

[51]

Teniendo en cuenta el valor que toma la provisión matemática determinada por el método prospectivo

$$PM({}_h i_t)_t = L({}_h i_t)_t - I({}_h i_t)_t \qquad [52]$$

Si se sustituye en la expresión anterior, se alcanza la expresión:

$$\begin{aligned} PM({}_h i_t + e)_t &= L({}_h i_t)_t - I({}_h i_t)_t + e \cdot \left[DEM_{L_t} \cdot L({}_h i_t)_t - DEM_{I_t} \cdot I({}_h i_t)_t \right] = \\ &= L({}_h i_t)_t \cdot \left[1 + e \cdot DEM_{L_t} \right] - I({}_h i_t)_t \cdot \left[1 + e \cdot DEM_{I_t} \right] = \\ &= L({}_h i_t + e)_t - I({}_h i_t + e)_t \end{aligned}$$

[53]

Lo cual es lógico.

11.2. Expresión a través de la Duración y Convexidad esperada

Bajo el mismo razonamiento que el expuesto en el subepígrafe anterior se alcanza la expresión,

$$PM({}_h i_t + e)_t = PM({}_h i_t)_t + PM({}_h i_t)_t \cdot \Delta$$
$$= PM({}_h i_t)_t + e \cdot \left[DEM_{L_t} \cdot L({}_h i_t)_t - DEM_{I_t} \cdot I({}_h i_t)_t\right] +$$
$$+ \frac{e^2}{2} \cdot \left[CXEM_{L_t} \cdot L({}_h i_t)_t - CXEM_{I_t} \cdot I({}_h i_t)_t\right]$$
[54]

Donde el valor que toma la convexidad esperada modificada para los pagos probables asumidos en la cartera de seguros asciende a:

$$CXEM_{L_t} = \frac{\sum_{h=t+1}^{s} (h-t+1)^2 \cdot L_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-2}}{L({}_h i_t)_t} \qquad [55]$$

Y la convexidad modificada de los ingresos probables que deben hacer los tomadores del seguro es:

$$CXEM_{I_t} = \frac{\sum_{h=t+1}^{n} (h-t+1)^2 \cdot I_h \cdot (1+{}_h i_t)^{-h+t-2}}{I({}_h i_t)_t} \qquad [56]$$

Teniendo en cuenta el valor que toma la provisión matemática determinada por el método prospectivo, sustituyendo en [20] y operando se alcanza la expresión:

$$PM({}_h i_t + e)_t = L({}_h i_t)_t \cdot \left[1 + e \cdot DEM_{L_t} + \frac{e^2}{2} \cdot CXEM_{L_t}\right] -$$
$$- I({}_h i_t)_t \cdot \left[1 + e \cdot DEM_{I_t} + \frac{e^2}{2} \cdot CXEM_{I_t}\right] \qquad [57]$$

Esto es,

$$PM({}_h i_t + e)_t = L({}_h i_t + e)_t - I({}_h i_t + e)_t \qquad [58]$$

Lo cual es también lógico.