

MODELO SEMIMARKOVIANO DE INVALIDEZ

Enrique Pociello García, Antonio Alegre Escolano,
Manuela Bosh Príncipe, Mercè Claramunt Bielsa y Javier Varea Soler

Universitat de Barcelona.

Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial.

Av. Diagonal 690, Barcelona 08034, España.

RESUMEN

En este trabajo planteamos un modelo actuarial de invalidez con carácter reversible, valorado actuarialmente, en el marco teórico de una operación con múltiples estados. En el desarrollo del mismo asumiremos que su estructura probabilística responde a un proceso estocástico semimarkoviano no homogéneo y continuo en el tiempo con probabilidades de reactivación y de fallecimiento como inválido bivariantes respecto la edad y la duración de la invalidez.

El objetivo del presente trabajo es calcular las probabilidades del modelo, conocidas las intensidades de transición correspondientes. Para ello, desarrollaremos un algoritmo basado en la resolución numérica del sistema integro-diferencial de ecuaciones de Volterra que describe la dinámica de la operación. Su implementación informática permite abordar el problema de valoración de los probabilidades de transición de la operación.

PALABRAS CLAVE

Ecuación integro-diferencial de Volterra, Ecuación característica de un modelo con múltiples estados, invalidez reversible, probabilidad de transición, proceso estocástico semimarkoviano no homogéneo y continuo en el tiempo, regla de los trapecios.

INTRODUCTION

Multistate models for disability can be developed in a mathematical framework based on Semi-Markov stochastic processes which provides rates of recovery and death which varied both by age and by duration of sickness. The practical calculation procedures which have been used are extremely hard. This paper aims to show how to obtain satisfactory bivariate formulae to represent rates of recovery and death from the state of disability in a more easily comprehensive way. The procedure proposed can be applied to any disability multistate model such as PHI(Permanent Health Insurance), LTC (Long Term Care) or DD (Dread Disease) covers.

1. MARCO TEÓRICO

Las rápidas transformaciones culturales, tecnológicas y económicas que impulsan los cambios sociales contemporáneos y el impacto específico del envejecimiento demográfico suscitan un creciente interés en la sociedad por coberturas de invalidez y otros productos derivados como, por ejemplo, el seguro de dependencia.

La matemática basada en procesos estocásticos markovianos y semimarkovianos constituye una potente herramienta de modelización desde un punto de vista descriptivo, puesto que, permite caracterizar y diseñar actuarialmente bajo una unicidad de enfoque cualquier operación con múltiples estados. Su aplicación actuarial ha dado lugar al desarrollo de una nueva matemática actuarial (ver **Haberman, S y Pitacco, E. (1999)**), **Pitacco, E (1995)**) que aporta coherencia y estructura a la valoración de cualquier operación con múltiples estados.

Los fundamentos matemáticos de las cadenas de Markov ya se desarrollaron durante el siglo XVIII (ver **Seal, H.L. (1977)**). No obstante, su aceptación definitiva en la práctica actuarial del seguro de invalidez se hizo esperar hasta finales de los años 70 con las decisivas contribuciones de **Amsler, M.H. (1968)** y **Hoem J.M. (1969)**. Sus trabajos sientan las bases de la aplicación de modelos de múltiples

estados inspirados en procesos estocásticos de Markov no homogéneos en el tiempo en operaciones de invalidez tanto reversible (invalidez de carácter temporal que, por tanto, considera la posibilidad de reactivación) como irreversible (invalidez de carácter permanente).

La literatura sobre utilización de procesos estocásticos de Markov en la modelización de operaciones de invalidez, tanto discretos como continuos en el tiempo, es muy amplia. Destacamos especialmente los trabajos de **Amsler, M.H. (1988)**, **CMIB (1991)**, **Haberman, S. (1999)**, **Herrera, A. (1995)**, **Hoem, J.M. (1988)**, **Gregorius, F.K (1993)** y **Wolthuis, H. (1994)**.

La obtención de las probabilidades asociadas a un proceso estocástico de Markov continuo en el tiempo suele plantearse a través del enfoque basado en las intensidades de transición (ver **Sverdrup, E. (1965)**). Este planteamiento asume la obtención de las probabilidades de transición a partir de las intensidades de transición dadas, previamente estimadas a través de métodos paramétricos (ver **Reinshaw y Haberman (1995)** y **(2000)**) o no paramétricos (ver **Copas, J.B. (1983)** y **Verral, R.J. (1996)**). Por su parte, la estructura de probabilidades de las operaciones con múltiples estados modelizadas a través de procesos estocásticos de Markov discretos en el tiempo suele construirse previa estimación de las tasas anuales de transición (ver **Gregorius, F.K (1993)** y **Wolthuis, H. (1994)**).

La utilización de los procesos markovianos permite plantear sin dificultades excesivas la superación de la hipótesis de reactivación, planteado, por ejemplo en **Alegre, A (1990)**. Por otro lado, la modelización de una operación con múltiples estados a través de un proceso estocástico de Markov permite llevar a cabo un seguimiento de la evolución del asegurado con el único condicionante de que las probabilidades de transición futuras únicamente dependen del estado y edad actuales. La sencillez de su definición permite deducir con relativa facilidad las diferentes probabilidades de transición de la operación. No obstante, para elaborar modelos más realistas que incorporen información adicional, debemos definir las probabilidades o intensidades asociadas a determinadas transiciones como funciones de más variables además de la edad. Por ejemplo, la edad de

suscripción de la póliza o el tiempo de permanencia en el estado actual, duración del estado actual desde la última transición, etc. El resultado es un proceso estocástico semimarkoviano. El tratamiento actuarial de un proceso estocástico semimarkoviano es mucho más complejo que el de un proceso de Markov. Además un proceso semimarkoviano requiere de una información estadística mucho más completa y elaborada. La primera aplicación de un proceso estocástico semimarkoviano a una operación de invalidez fue llevada a cabo por **Janssem, J. (1966)**. El lector interesado en la aplicación de este tipo de procesos estocásticos en la modelización del riesgo de invalidez debe consultar el trabajo de **CMIB (1991)**.

El trabajo que hemos desarrollado proporciona un algoritmo de cálculo de las probabilidades de transición asociadas a un modelo de invalidez reversible o incapacidad temporal, diseñado actuarialmente a través de un proceso estocástico semimarkoviano no homogéneo y continuo en el tiempo. Como resultado, obtendremos probabilidades de transición del estado de invalidez que dependerán tanto de la edad como de la duración de la invalidez, a diferencia del trabajo de **Herrera, A. (1995)**, donde todas las probabilidades de transición únicamente dependen de la edad.

Este algoritmo se basa en la obtención de la ecuación característica de la operación, la cual describe la dinámica actuarial de las transiciones del modelo. Ésta constituirá un sistema de ecuaciones integro-diferenciales de Volterra. Su resolución numérica a través de un algoritmo recurrente nos permitirá hallar los valores de las probabilidades del modelo.

El trabajo se estructura de la siguiente forma. La sección 2 describe el modelo de invalidez, es decir sus estados y transiciones. En la siguiente sección deducimos una serie de importantes propiedades que verifican las probabilidades de transición del modelo. Su aplicación en la sección 4 permite obtener la ecuación general del modelo, la cual sirve para caracterizar la dinámica interna de las transiciones del modelo. En la sección 5 resolvemos numéricamente la ecuación general obteniendo un conjunto de relaciones recurrentes. En la sección 6 realizamos una aplicación numérica del algoritmo

desarrollado. Finalmente, la sección 7 y última, recoge las conclusiones más relevantes alcanzadas en todo el trabajo.

2. MODELIZACIÓN ACTUARIAL

En esta sección vamos a describir el modelo teórico de invalidez del cual vamos a plantear la obtención de sus probabilidades de transición. Para ello, enumeraremos tanto los estados que intervienen en el modelo como las transiciones que lo caracterizan. Además, analizaremos su estructura probabilística, basada en un proceso estocástico semimarkoviano no homogéneo y continuo en el tiempo, en el que las probabilidades de transición del estado de invalidez dependerán de la duración de la invalidez actual.

El modelo actuarial de invalidez que presentamos en el trabajo está basado en un modelo con múltiples estados. En él, asumimos que la evolución del riesgo de invalidez reversible puede ser descrita en términos de la pertenencia o no del asegurado, en cada instante de tiempo, a un estado 'i' asociado a dicho riesgo, obviamente incluido en el conjunto de estados de la operación, $\zeta = \{a, i, m\}$, donde 'a' y 'm' representan respectivamente los estados de actividad y fallecimiento. El siguiente esquema gráfico representa las transiciones de estado que caracterizan a la operación con múltiples estados considerada.

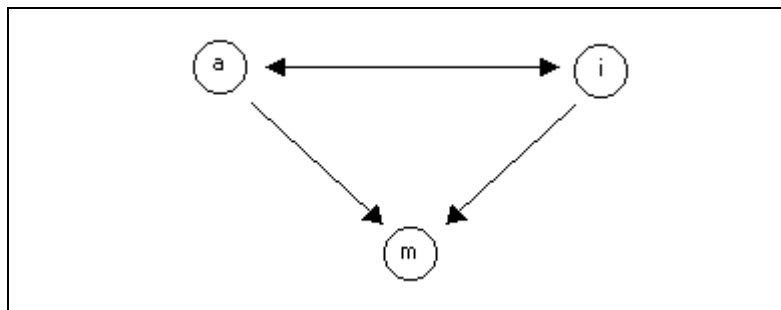


Figura 1. Esquema de estados.

Tal como podemos observar en la figura 1, planteamos una invalidez de carácter reversible ya que contemplamos tanto la posibilidad de invalidación como la reactivación, es decir, la transición del estado de invalidez al estado de actividad. Obviamente el estado 'm' es absorbente, ya que, tal como muestra la figura 1, una vez alcanzado éste no puede producirse una transición a un estado diferente. La estructura probabilística del modelo se define a partir de un proceso estocástico semimarkoviano en que las probabilidades de transición del estado de invalidez, tanto de reactivación como de fallecimiento, dependen de la edad y la duración en años de la invalidez.

Formalmente, asumimos la modelización del riesgo de invalidez a través de un proceso estocástico semimarkoviano continuo en el tiempo, $\{S(x), D(x), x \geq 0\}$, definido sobre el conjunto o espacio de estados $\zeta = \{a, i, m\}$. Los valores de $S(x)$ expresan el estado del asegurado en edad x . Por su parte, $D(x)$ representa el tiempo que el asegurado lleva permaneciendo ininterrumpidamente en el estado actual, $S(x)$, desde la última transición registrada.

Mientras que $S(x)$ puede tomar uno de los tres valores 'a', 'i' o 'm' que forman el espacio de estados ζ , $D(x)$ toma valores en el intervalo real positivo $[0, \infty)$. En el caso que $S(x)=i$, el valor de $D(x)$ representa la duración de la invalidez que el asegurado padece en la edad x . El proceso estocástico $\{S(x), D(x), x \geq 0\}$ cumple con que, para todo conjunto de n edades ordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$ y sus respectivos estados $\{s_1, \dots, s_n\}$, siendo $x_1 < \dots < x_n$ y $s_i \in \zeta$ se cumple que la probabilidad asociada a la anterior trayectoria estocástica está comprendida entre 0 y 1.

$$0 \leq \Pr \{S(x_1) = s_1 \wedge D(x_1) = d_1 \wedge \dots \wedge S(x_n) = s_n \wedge D(x_n) = d_n\} \leq 1$$

La siguiente propiedad definida sobre $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{s_1, \dots, s_n\}$ caracteriza $\{S(x), D(x), x \geq 0\}$ como un proceso estocástico semimarkoviano continuo en el tiempo.

$$\begin{aligned} \Pr\{S(x_n)=s_n / S(x_1)=s_1 \wedge D(x_1)=d_1 \wedge \dots \wedge S(x_{n-1})=s_{n-1} \wedge D(x_{n-1})=d_{n-1}\} = \\ = \Pr \{S(x_n) = s_n / S(x_{n-1}) = s_{n-1} \wedge D(x_{n-1}) = d_{n-1}\} \end{aligned} \quad (1)$$

La expresión (1) explica cómo el estado en la edad x_n depende del estado de la edad anterior, x_{n-1} , así como de la duración de dicho estado desde la última transición acontecida. Esto significa que, por ejemplo, si el asegurado se encuentra inválido en la actualidad, la probabilidad futura de que éste permanezca inválido no depende ni de la duración ni el número de otros episodios de invalidez anteriores al actual. Las probabilidades condicionadas deducidas de la expresión (1) se denominan probabilidades de transición. Para referirnos a ellas de forma general utilizaremos la siguiente nomenclatura.

$${}_t p_{x,z}^{ij} = \Pr \{S(x+t) = j / S(x) = i \wedge D(x) = z\} \quad (2)$$

Dada la naturaleza personal del riesgo de invalidez, las probabilidades de transición no son homogéneas en el tiempo y varían con la edad del asegurado, es decir, en general se verifica que ${}_t p_{x,z}^{ij} \neq {}_t p_{y,z}^{ij}$, siendo $x \neq y$. Por otra parte, las probabilidades de transición toman valores comprendidos entre 0 y 1, por tanto, $0 \leq {}_t p_{x,z}^{ij} \leq 1$.

En el modelo de invalidez propuesto únicamente es relevante considerar la duración del estado actual cuando el asegurado se halle inválido. Por ello, cuando $S(x) = a$ prescindiremos del valor de $D(x)$. Como resultado, únicamente seguiremos la evolución de $D(x)$ en las edades en las que el asegurado se encuentra inválido. Así, si el asegurado permanece activo en todas edades consideradas la expresión (1) se simplificará considerablemente, coincidiendo con la formulación de la propiedad básica que caracteriza todo proceso estocástico markoviano.

$$\Pr\{S(x_n)=a / S(x_1)=a \dots \wedge S(x_{n-1})=a\} = \Pr\{S(x_n)=a / S(x_{n-1})=a\}$$

Consecuentemente, las probabilidades de transición del estado de actividad no dependen de $D(x)$, tal como reflejan sus probabilidades de transición.

$${}_t P_x^{aa} = P(S(x+t) = a / S(x) = a) \quad (3)$$

$${}_t P_x^{ai} = P(S(x+t) = i / S(x) = a) \quad (4)$$

$${}_t P_x^{am} = P(S(x+t) = m / S(x) = a) \quad (5)$$

Las expresiones (3), (4) y (5) suman 1. Por su parte, las probabilidades de transición del estado de invalidez sí que dependen del valor de $D(x)$ lo cual sí reflejamos en su nomenclatura.

$${}_t P_{x,z}^{ia} = P(S(x+t) = a / S(x) = i \wedge D(x) = z) \quad (6)$$

$${}_t P_{x,z}^{ii} = P(S(x+t) = i / S(x) = i \wedge D(x) = z) \quad (7)$$

$${}_t P_{x,z}^{im} = P(S(x+t) = m / S(x) = i \wedge D(x) = z) \quad (8)$$

Las expresiones (6), (7) y (8) también suman 1. Las siguientes expresiones hacen referencia a las probabilidades de permanencia ininterrumpida en los estados de actividad e invalidez respectivamente.

$${}_t \bar{P}_x^{aa} = P(S(x+u) = a \forall u \in [0, t] / S(x) = a) \quad (9)$$

$${}_t \bar{P}_{x,z}^{ii} = P(S(x+u) = i \forall u \in [0, t] \wedge D(x) = z / S(x) = i) \quad (10)$$

Por razones obvias se cumple que ${}_t P_x^{ma} = {}_t P_x^{mi} = 0$ y ${}_t P_x^{ma} = 1$. Para poder obtener posteriormente las probabilidades de transición del modelo necesitamos conocer previamente las correspondientes intensidades de transición. Una intensidad de transición cualquiera μ_x^{ij} puede interpretarse como la probabilidad de que ocurra la transición

entre los estados ‘i’ y ‘j’ a lo largo del intervalo infinitesimal $[x, x+dx)$ condicionada a que el asegurado se encuentra en el estado ‘i’ en la edad x . En el modelo propuesto consideramos las siguientes intensidades de transición.

$$\begin{aligned} \mu_x^{ai} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t P_x^{ai}}{t} & \mu_x^{am} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t P_x^{am}}{t} \\ \mu_{x,z}^{ia} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t P_{x,z}^{ia}}{t} & \mu_{x,z}^{im} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{{}_t P_{x,z}^{im}}{t} \end{aligned}$$

Asumimos que los anteriores límites existen y que las intensidades de transición son funciones continuas respecto x y z , esta última variable en el caso de las transiciones del estado de invalidez. Consecuentemente, las tasas instantáneas del estado de actividad solamente dependen de la edad, x . No así las del estado de invalidez, que, además, dependen de la duración de la invalidez, z .

3. PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN.

En esta sección deducimos una serie de propiedades de las probabilidades de transición cuyo conocimiento resulta primordial para después poder construir el sistema de ecuaciones integro-diferenciales de Volterra que describe la dinámica interna de la operación. Empezaremos considerando la transición $a \rightarrow a$, asociada a la expresión (3). Al respecto, la siguiente expresión ilustra cómo un asegurado que se halla activo en la edad x puede alcanzar el estado de actividad en la edad $(x + t)$, encontrándose activo o bien inválido en una edad intermedia $(x + r)$, siendo $0 < r < t$.

$$\begin{aligned} {}_t p_x^{aa} &= \Pr(S(x+t)=a \wedge S(x+r)=a / S(x)=a) + \\ &+ \Pr(S(x+t)=a \wedge S(x+r)=i \wedge D(x+r)=z / S(x)=a) \quad (11) \end{aligned}$$

El primer sumando de la expresión (11) se refiere al caso en que el asegurado se halla activo en la edad intermedia $(x + r)$. Su desarrollo,

de acuerdo a la relación (1), conduce al resultado final recogido en (12).

$$\begin{aligned}
 &= \Pr(S(x+t)=a \wedge S(x+r)=a / S(x)=a) = \\
 &= \Pr(S(x+r)=a / S(x)=a) \cdot \Pr(S(x+t)=a / S(x+r)=a \wedge S(x)=a) = \\
 &= \Pr(S(x+r)=a / S(x)=a) \cdot \Pr(S(x+t)=a / S(x+r)=a) = \\
 &= {}_{/r}P_x^{aa} \cdot {}_{/t-r}P_{x+r}^{aa} \quad (12)
 \end{aligned}$$

El segundo sumando de la expresión (11) contempla el caso en que el asegurado se encuentre inválido en la edad $(x+r)$. La aplicación de la definición general del proceso estocástico semimarkoviano, recogida por la expresión (1), conduce a la expresión (13).

$$\begin{aligned}
 &= \Pr(S(x+t)=a \wedge S(x+r)=i \wedge D(x+r)=z \in [0, r] / S(x)=a) = \\
 &= \int_0^r \{ \Pr(S(x+r)=i \wedge D(x+r)=u / S(x)=a) \cdot \\
 &\cdot \Pr(S(x+t)=a / S(x+r)=i \wedge D(x+r)=u \wedge S(x)=a) \} du = \\
 &= \int_0^r (\Pr(S(x+r)=i \wedge D(x+r)=u / S(x)=a) \cdot \\
 &\cdot \Pr(S(x+t)=a / S(x+r)=i \wedge D(x+r)=u)) du = \\
 &= \int_0^r {}_{/r-u}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/s-r}P_{x+r,u}^{ia} du \quad (13)
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones (12) y (13) obtenemos la relación definitiva.

$${}_{/t}P_x^{aa} = {}_{/r}P_x^{aa} \cdot {}_{/t-r}P_{x+r}^{aa} + \int_0^r {}_{/r-u}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r}P_{x+r,u}^{ia} du \quad (14)$$

El resto de probabilidades de transición definidas en la sección anterior se escinden de forma análoga. El resultado es el siguiente conjunto de relaciones integrales.

$${}_t P_x^{ai} = {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r}^{ai} + \int_0^r {}_{/r-u} P_x^{aa} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,u}^{\bar{ii}} du \quad (15)$$

$$\begin{aligned} {}_t P_x^{am} &= {}_r P_x^{am} + {}_r P_x^{aa} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r}^{am} + \\ &+ \int_0^r {}_{/r-u} P_x^{aa} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,u}^{im} du \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} {}_t P_{x,z}^{ia} &= {}_r P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r}^{aa} + {}_r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,z+r}^{ia} + \\ &+ \int_0^r {}_{/r-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,u}^{ia} du \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} {}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} &= {}_r P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r}^{ai} + {}_r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,z+r}^{\bar{ii}} + \\ &+ \int_0^r {}_{/r-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,u}^{\bar{ii}} du \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} {}_t P_{x,z}^{im} &= {}_r P_{x,z}^{im} + {}_r P_{x,z}^{ia} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r}^{am} + {}_r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,z+r}^{im} \\ &+ \int_0^r {}_{/r-u} P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+r-u}^{ai} \cdot {}_{/u} P_{x+r-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,u}^{im} du \end{aligned} \quad (19)$$

$${}_t P_x^{\bar{aa}} = {}_r P_x^{\bar{aa}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r}^{\bar{aa}} \quad (20)$$

$${}_t P_{x,z}^{\bar{ii}} = {}_r P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/t-r} P_{x+r,z+r}^{\bar{ii}} \quad (21)$$

Obsérvese como las probabilidades de transición de permanencia ininterrumpida, recogidas en las expresiones (20) y (21) son perfectamente escindibles, a diferencia del resto. Nótese, cómo la suma de probabilidades de transición, tanto del estado de actividad como de invalidez suman 1.

4. ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DEL MODELO

El conocimiento de la ecuación característica del modelo resulta primordial para conocer la relación existente entre las probabilidades e intensidades de transición que intervienen. Asociada a cada transición definida, tendremos una ecuación, que obtendremos por diferenciación de la probabilidad de transición correspondiente.

Empezaremos considerando la transición $a \rightarrow a$, asociada a la expresión (3). Diferenciamos ${}_t P_x^{aa}$ respecto al tiempo, posteriormente sustituimos ${}_{t+\Delta t} P_x^{aa}$ por la expresión (14), anteriormente deducida.

$$\begin{aligned} \frac{d({}_t P_x^{aa})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{t+\Delta t} P_x^{aa} - {}_t P_x^{aa}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_t P_x^{aa} \cdot {}_{/ \Delta t} P_{x+t}^{aa} + \int_0^t {}_{/ t-u} P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/ u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot {}_{/ \Delta t} P_{x+t,u}^{ia} du - {}_t P_x^{aa}}{\Delta t} = \\ &= -{}_t P_x^{aa} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/ \Delta t} P_{x+t}^{aa}}{\Delta t} + \int_0^t {}_{/ t-u} P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/ u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}_{/ \Delta t} P_{x+t,u}^{ia}}{\Delta t} du = \\ &= -{}_t P_x^{aa} \cdot (\mu_{x+t}^{ai} + \mu_{x+t}^{am}) + \int_0^t {}_{/ t-u} P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/ u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,u}^{ia} du \quad (22) \end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos las ecuaciones integro-diferenciales correspondientes a las probabilidades de transición (4) y (5).

$$\begin{aligned} \frac{d({}_t P_x^{ai})}{dt} &= {}_t P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{ai} - \\ &+ \int_0^t {}_{/ t-u} P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/ u} P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mu_{x+t,u}^{ia} + \mu_{x+t,u}^{im}) du \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_x^{am})}{dt} &= {}_{/t}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t}^{am} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,u}^{im} du \end{aligned} \quad (24)$$

Las ecuaciones integro-diferenciales asociadas a las transiciones del estado de invalidez se obtiene, de forma muy similar que las anteriores ecuaciones, por sustitución de (17) en la expresión resultante de diferenciar la probabilidad de transición correspondiente. El resultado queda plasmado en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{ia})}{dt} &= -{}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot (\mu_{x+t}^{ai} + \mu_{x+t}^{am}) + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,z+t}^{ia} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,u}^{ia} du \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}})}{dt} &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t}^{ai} - {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot (\mu_{x+t,z}^{ia} + \mu_{x+t,z}^{im}) \\ &- \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot (\mu_{x+t,u}^{ia} + \mu_{x+t,u}^{im}) du \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d({}_{/t}P_{x,z}^{im})}{dt} &= {}_{/t}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t}^{am} + {}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,z+t}^{im} + \\ &+ \int_0^t {}_{/t-u}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,u}^{im} du \end{aligned} \quad (27)$$

En el caso de permanencia ininterrumpida, tanto en actividad como en invalidez, como resultado de la perfecta escindibilidad, obtenemos expresiones mucho más sencillas que el resto de las transiciones.

$${}_{/t}P_x^{\bar{aa}} = e^{-\int_0^t (\mu_{x+s}^{am} + \mu_{x+s}^{ai}) ds} \quad (28)$$

$${}_{/t}P_{x,z}^{\bar{ii}} = e^{-\int_0^t (\mu_{x+s,z+s}^{im} + \mu_{x+s,z+s}^{ia}) ds} \quad (29)$$

El resultado es el siguiente sistema de ecuaciones integro-diferenciales. El conjunto de ecuaciones (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28) y (29) constituyen el sistema de ecuación general del modelo planteado a partir del cual podemos conocer la dinámica interna de las transiciones que lo componen. Las ecuaciones (22), (24), (28) y (29) han aparecido deducidas de forma intuitiva por los autores en los trabajos de **CMIR12 (1991)**, aunque con algunos errores en las expresiones finales referentes a las probabilidades de transición bivariantes desde el estado de invalidez, y en **Haberman, S. y Pitacco, E. (1999)**.

5. OBTENCIÓN NUMÉRICA DE LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

En esta sección obtendremos una expresión aproximada de cada una de las probabilidades de transición de la operación tratada a partir de la hipótesis fundamental de que disponemos de los valores estimados de μ_x^{ai} , μ_x^{ad} , $\mu_{x,z}^{ia}$ y $\mu_{x,z}^{id}$. Su aplicación requiere la fragmentación de la temporalidad t de una probabilidad de transición en subintervalos más pequeños de amplitud h . Cada subintervalo de tiempo, t_i , lo expresaremos como $t_i = i \cdot h$, de tal forma que la temporalidad total $[0, t]$ puede representarse como sigue.

$$[s, t] = \bigcup_{k=1}^m [t_{k-1}, t_k]$$

Fijamos las siguientes condiciones iniciales de entorno:

$$\begin{array}{lll} {}_{/t_0} P_x^{aa} = 1 & {}_{/t_0} P_x^{ai} = 0 & {}_{/t_0} P_{x,z}^{ad} = 0 \\ {}_{/t_0} P_{x,z}^{ii} = 1 & {}_{/t_0} P_{x,z}^{ia} = 0 & {}_{/t_0} P_{x,z}^{id} = 0 \end{array}$$

El método que proponemos está basado en la aproximación numérica de las expresiones integrales y diferenciales que aparecen en las ecuación general. Las expresiones integrales se aproximan mediante el

método de los trapecios mientras que las expresiones diferenciales a través de la siguiente expresión:

$$\left[\frac{d({}_{/t}P_x^{ij})}{dt} \right]_{t=t_n} \cong \frac{{}_{/t_{n+1}}P_x^{ij} - {}_{/t_n}P_x^{ij}}{h}$$

donde $i = a, i, m$ y $j = a, i, m$. Empezaremos considerando la transición $a \rightarrow a$, asociada a la expresión (3). Aproximamos numéricamente la derivada y la integral definida que aparece en la ecuación integro-diferencial (22).

$$\left[\frac{d({}_{/t}P_x^{aa})}{dt} \right]_{t=t_n} \cong \frac{{}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} - {}_{/t_n}P_x^{aa}}{h}$$

$$\int_0^t {}_{/t-u}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t-u}^{ai} \cdot {}_{/u}P_{x+t-u,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t,u}^{ia} du \cong$$

$$\cong \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h \right] \cdot \frac{h}{2} \cdot \mu_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_n}^{ia}$$

Una vez sustituida la anterior relación en la ecuación (22), correspondiente a su probabilidad de transición y simplificando obtenemos la siguiente relación recurrente.

$${}_{/t_{n+1}}P_x^{aa} \cong \left(1 - h \left(\mu_{x+t_n}^{ai} + \mu_{x+t_n}^{am} \right) \right) \cdot {}_{/t_n}P_x^{aa} + \frac{h^2}{2} \cdot \mu_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x_n,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_n}^{ia} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h^2 \right] \quad (30)$$

Del mismo modo, obtenemos las siguientes ecuaciones recurrentes asociadas al resto de probabilidades de transición tratadas.

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_x^{ai} &\cong {}_{/t_n}P_x^{ai} + h \cdot {}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t_n}^{ai} - \frac{h^2}{2} \cdot \mu_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \left(\mu_{x+t_n,t_n}^{ia} + \mu_{x+t_n,t_n}^{im} \right) + \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{i-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \left(\mu_{x+t_n,t_r}^{ia} + \mu_{x+t_n,t_r}^{im} \right) h^2 \right] \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_x^{am} &\cong {}_{/t_n}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t_n}^{am} \cdot h + {}_{/t_n}P_x^{am} + \frac{h^2}{2} \cdot \mu_x^{ai} \cdot {}_{/t_n}P_{x,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_n}^{im} + \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_x^{aa} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \mu_{x+t_n,t_r}^{im} h^2 \right] \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{ia} &\cong \left(1 - h \left(\mu_{x+t}^{ai} + \mu_{x+t}^{am} \right) \right) {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} + {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,z+t_n}^{ia} h + \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_r}^{ia} \cdot h^2 \right] \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{ii} &\cong {}_{/t_n}P_{x,z}^{ii} + {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t_n}^{ai} \cdot h - {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \left(\mu_{x+t,z+t}^{ia} + \mu_{x+t,z+t}^{im} \right) h + \\
 &\quad - \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \left(\mu_{x+t_n,t_r}^{ia} + \mu_{x+t_n,t_r}^{im} \right) h^2 \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{/t_{n+1}}P_{x,z}^{im} &\cong {}_{/t_n}P_{x,z}^{im} + {}_{/t_n}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t_n}^{am} h + {}_{/t_n}P_{x,z}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,z+t_n}^{im} \cdot h + \\
 &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \left[{}_{/t_n-t_r}P_{x,z}^{ia} \cdot \mu_{x+t_n-t_r}^{ai} \cdot {}_{/t_r}P_{x+t_n-t_r,0}^{\bar{ii}} \cdot \mu_{x+t_n,t_r}^{im} \cdot h^2 \right] \quad (35)
 \end{aligned}$$

Obsérvese cómo las probabilidades de transición del estado de actividad (30), (30) y (31) suman 1. De la misma forma, que lo hacen las expresiones (32), (33) y (34).

La implementación informática de las anteriores ecuaciones recurrentes permite obtener los valores aproximados de las diferentes probabilidades de transición definidas. Cuanto menor sea h , mayor será la precisión de la aproximación, del mismo modo que lo será el tiempo de computación requerido.

6. EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección hemos realizado una pequeña aplicación práctica del algoritmo numérico propuesto en nuestro trabajo. Para, ello nos hemos basado en las intensidades de transición recogidas en el anexo del trabajo. Los resultados obtenidos quedan plasmados en el siguiente cuadro.

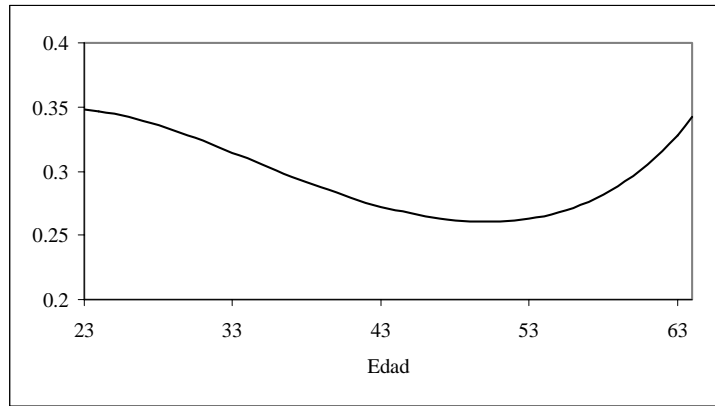
x	P_x^{ai}	$q_x^{a:ai}$	$P_{x, 0.5/12}^{ia}$	$P_{x, 1/12}^{ia}$	$P_{x, 3/12}^{ia}$
30	0,00926	0,32266	0,83151	0,79534	0,72105
35	0,01098	0,29963	0,81053	0,76838	0,68835
40	0,01314	0,27782	0,78584	0,73711	0,65032
45	0,01617	0,26197	0,75617	0,70034	0,60567
50	0,02087	0,25582	0,71971	0,65647	0,55281
55	0,02877	0,26333	0,67381	0,60333	0,48967
60	0,04311	0,29050	0,61418	0,53783	0,41366

Tabla 1. Probabilidades y tasas anuales del modelo.

Las tasas anuales de invalidación recogen el número esperado de invalidaciones durante un año y responde a la siguiente expresión integral.

$${}_{/t}q_x^{a:ai} = \int_0^t {}_{/u}p_x^{aa} \cdot \mu_{x+u}^{ai} \cdot du$$

Los valores de p_x^{ai} crecen con la edad. Por su parte, $q_x^{a:ai}$ decrece hasta los 50 años. A partir de esta edad, coincidiendo con el aumento de la tasa de crecimiento p_x^{ai} , observamos un cambio de tendencia, pues los valores de $q_x^{a:ai}$ comienzan a crecer. Obsérvese cómo la tasa anual de invalidación sigue una evolución muy similar a la de la intensidad de transición de invalidación, representada en la siguiente gráfica.



Gráfica 1. Intensidad de invalidación

Los datos referentes a las probabilidades de reactivación reflejan cómo las probabilidades de reactivación decrecen respecto tanto la edad como la duración de la invalidez. Tal como queda reflejado en la tabla 2, la probabilidad temporal de invalidación es creciente con respecto la edad del asegurado.

x	${}_t P_x^{ai}$
35	0.011519
40	0.014423
45	0.019826
50	0.027999
55	0.044523
60	0.074985
65	0.134239

Tabla 2. Probabilidades de invalidación

7. CONCLUSIONES

La modelización a través de un proceso estocástico semimarkoviano es más potente que la utilización de un proceso estocástico de Markov porque tiene en cuenta a más variables. Su aplicación resulta muy compleja, tanto estadísticamente (requiere de una experiencia estadística muy detallada) como matemáticamente (su ecuación característica constituye un sistema de ecuaciones integro-

diferenciales de Volterra, en cambio, en un proceso estocástico de Markov son ecuaciones diferenciales de Chapman-kolmogorov). A lo largo del trabajo hemos deducido las ecuaciones integro-diferenciales que forman su ecuación general. Su resolución numérica nos ha permitido valorar las probabilidades de transición. El método propuesto es totalmente novedoso y ofrece claramente una serie de ventajas con respecto propuestas anteriores:

- Es trasladable a cualquier tipo de operación actuarial que se adapte al esquema de estados y transiciones del modelo expuesto. Por ejemplo puede aplicarse en la modelización de un seguro de dependencia.
- A diferencia de otros modelos como, por ejemplo, el desarrollado por el **CMIB (1991)**, no requiere de la asunción adicional de hipótesis actuariales, muy restrictivas y ajustadas a las características particulares de la operación actuarial modelizada.
- La aplicación de nuestro algoritmo permite calcular cualquier tipo de probabilidad de transición del modelo, lo cual, por ejemplo, en el modelo presentado en el **CMIB (1991)** no es posible, ya que, algunas probabilidades como la probabilidad de reactivación no aparecen definidas.
- Algunas de las ecuaciones de las transiciones obtenidas en el trabajo ya habían aparecido en el **CMIB (1991)** aunque con algún error en las expresiones de las probabilidades bivariantes de transición como inválido. El modelo desarrollado en el presente trabajo ha corregido estos errores.

BIBLIOGRAFÍA

AMSLER M.H. (1968), “*Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie*”. Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, Mónaco, vol 5, pp 731-746.

- AMSLER M.H. (1988)**, “*Sur la modélisation des risques vie par les chaînes de Markov*”. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, vol 3, pp 1-17.
- AUBANELL, A., BENSENY, A. Y DELSHAMS, A. (1991)**, “*Eines bàsiques de càlcul numèric*”. UAB. Barcelona
- C.M.I.B. (1991)**, “*C.M.I.R. 12, The analysis of permanent health insurance data*”. Continuous Mortality Investigation Bureau, The institute of actuaries y The faculty of actuaries.
- COPAS, B. Y HABERMAN, S. (1983)**, “*Non-parametric graduation using kernel methods*”. Journal of the Institute of actuaries 110, pp 135-156.
- GREGORIUS, F.K. (1993)**, “*Disability insurance in The Netherlands*”. Insurance: mathematics and economics 13, no 2, pp 101-116.
- HABERMAN, S. Y PITACCO, E. (1999)**, “*Actuarial models for disability insurance*”. Chapman and Hall. Londres.
- HERRERA, A (1995)**, “*Probabilidades de transición. Aplicación al estudio de la incapacidad temporal*”. Anales del Instituto de Actuarios Españoles. Madrid.
- HOEM, J.M. (1969)**, “*Markov chain models in life insurance*”. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematiker IX, no 2, pp 91-107.
- HOEM, J.M. (1988)**, “*New Avenues in modelling life insurance and other insurance of persons*”. Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries, Helsinki, Vol R, pp 171-202.
- JANSSEN, J. (1966)**, “*Application des processus semi-markoviens à un problème d’invalidité*”. Bulletin de l’Association Royale des Actuaires Belges, n. 63, pp 35-52.
- PITACCO, E. (1995)**, “*Actuarial models for pricing disability benefits: Towards a unifying approach*”. Insurance: Mathematics and Economics 16, pp 39-62.
- RENSHAW, A.E. y HABERMAN, S. (1995)**, “*On the graduation associated with a multiple state model for permanent health insurance*”. Insurance: mathematics and economics 17, pp 1-17.
- RENSHAW, A.E. y HABERMAN, S. (2000)**, “*Modelling the recent time trends in UK permanent health insurance, recovery, mortality and claim inception transition intensities*”. Insurance: mathematics and economics 27, pp 365-396.

SEAL, H. (1977), “*Studies in the History or probability and Statistics XXXV*”. Multiple decrements or competing risks. *Biometrika*, vol 64, n. 3, pp 429-439.

SVERDRUP, E. (1965), “*Estimates and Test Procedures in connection with Stochastic Models for Deaths, Recoveries and Transfers between different States of Health*”. *Scandinavian Actuarial Journal XLVIII*, pp 184-211.

VERRALL, R. J. (1996), “*An unified framework for graduation*”. Actuarial research paper n. 85. Department of Actuarial Science and Statistics. City University. London.

WOLTHUIS, H (1994), “*Life insurance Mathematics (The Markovian model)*”. CAIRE Education series n. 2. University of Amsterdam. Bruselas.

ANEXO

Para llevar a cabo el ejemplo numérico de la sección 6, hemos utilizado las intensidades de transición estimadas por el **CMIB (1991)** referidas para un periodo de carencia de 1 semana, para el cuadrinio 1975-78.

$$\begin{aligned}\mu_x^{ai} &= e^{-1.798 + 0.080844 \cdot x - 0.002686 \cdot x^2 + 0.000025 \cdot x^3} \\ \mu_x^{am} &= -0.00465192 - 0.00452546 \cdot \left(\frac{x-70}{50}\right) + e^{-3.985723 + 3.185063 \left(\frac{x-70}{50}\right)} \\ \mu_{x,z}^{ia} &= \mu_{y+z,z}^{ia} = (51.057202 - 2.687089 \cdot (1 + 1.419428 \cdot \\ &\quad \cdot \text{Max}(4 - 52.15 \cdot z, 0)) \sqrt{Z} \cdot (Y - 50)) \cdot e^{-4.914441 \cdot \sqrt{z}}\end{aligned}$$

donde,

$$Y = \begin{cases} y & z \leq 5 \\ y + z - 5 & z > 5 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} z & z \leq 1 \\ 1 + 0.362456 \cdot (z - 1) & 1 < z \leq 5 \\ 1 + 4 \cdot 0.362456 & z > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mu_{x,z}^{im} &= \mu_{y+z,z}^{im} = (0.237884 - 0.0048 \cdot Y + 0.00009 \cdot Y^2) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{e^{\frac{-0.8747}{(Z+0.3573)^{2.613917}}}}{(Z + 0.357384)^{2.613917}} + r \cdot e^{s \cdot (Y+Z)}\end{aligned}$$

donde

$$Y = \begin{cases} y & z \leq 5 \\ y + z - 5 & z > 5 \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} z & z \leq 5 \\ 5 & z > 5 \end{cases}$$