# CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE DEPENDENCIA: UNA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA

Enrique Pociello García[1], Javier Varea Soler
y Alberto Martínez González[2]

**RESUMEN:** En España se está viviendo una auténtica revolución de la longevidad. La mejora de la sanidad pública, los avances de la tecnología médica y mejores condiciones de vida han provocado en todas las edades un fuerte incremento de la esperanza de vida. Este envejecimiento de la población va acompañado de un aumento del número de dependientes, es decir, de personas que necesitan de la asistencia de otras para realizar las actividades básicas de la vida diaria (comer, vestirse, continencia, moverse, etc.).

El seguro de dependencia es una fórmula de previsión que canaliza el ahorro privado del asegurado otorgándole unas prestaciones (económicas, reembolso de gastos ocasionados o asistenciales) cuando éste sea dependiente. De esta forma, el seguro de dependencia permite instrumentalizar la atención del dependiente fuera del ámbito familiar.

El trabajo que presentamos tiene como finalidad presentar un método que permita obtener tablas de dependencia a partir del conocimiento de las tasas de prevalencia o incidencia de la dependencia. Concluimos, presentando los resultados de la puesta en práctica del modelo con las tasas de prevalencia de la encuesta de salud OARS (1994).

**PALABRAS CLAVE**: Actividades Básicas de la Vida Diaria (ABVD), Actividades Instrumentales de la Vida Diaria (AIVD),

[1] Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial de la Universidad de Barcelona.
[2] Departamento de Contabilidad de la Universidad de Barcelona.

cohorte, dependencia, envejecimiento, modelos de múltiples estados, probabilidad de transición, tasa de prevalencia.

## 1. INTRODUCCION

Las proyecciones demográficas elaboradas por el Instituto Nacional de Estadística (2001) prevén que la población española mayor de 65 años en España pasará de los 6.5 millones actuales a 9.4 millones en el año 2025, un 21.68% de la población total y a 12.8 millones en el año 2050, un 31.12%. Este aumento de la longevidad, provocado por un notable descenso de las tasas de mortalidad infantil y general, unido a una fuerte caída de la fecundidad, hace aumentar el peso proporcional de las personas mayores en el conjunto de la población. Este proceso de envejecimiento que, no únicamente se produce en España sino, en general, en todos los países desarrollados no es más que la expresión de progreso social y material alcanzado por estos países.

La tendencia al envejecimiento de la población es casi irreversible, es muy poco probable que vuelvan a darse las poblaciones jóvenes del pasado. Es más, el último informe publicado el 28 de febrero de este año por la División de Población de las Naciones Unidas señala a España como el país con más envejecimiento para el año 2050, con una edad media de 55 años.

Las consecuencias profundas, generales y duraderas del envejecimiento de la población brindan enormes oportunidades a todas las sociedades, pero también imponen enormes desafíos y retos como la protección y atención de las personas dependientes. En efecto, la salud de las personas de mayor edad generalmente se deteriora con el paso de los años, lo que se traduce en una mayor demanda de atención de dependencia a medida que aumenta el número de las personas con edad más avanzada.

En la actualidad, según datos extraídos de La encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de salud (INE 2000), la población dependiente mayor de 65 años se estima en 1.423.962 personas lo que representa un 22% de la población total mayor de 65 años. De mantenerse esa proporción, las proyecciones del INE anteriormente citadas auguran una cifra de 2.073.451 y 2.820.375 personas dependientes para los años 2025 y 2050 respectivamente.

El concepto de dependencia puede incitar a la confusión dada su reciente y creciente utilización. En el presente trabajo, usaremos la definición de dependencia acuñada en 1998 por el Consejo de Europa: "Es dependiente la persona que por razones ligadas a la falta o pérdida de capacidad física, psíquica o intelectual tiene necesidad de una asistencia y o ayuda importante para la realización de las actividades diarias". Rivera, J (2001) particulariza esta definición en los siguientes términos: "Una persona es dependiente cuando no pueda desarrollar por si misma un cierto numero de las actividades básicas de la vida diaria como son el comer, vestirse, desplazarse, bañarse, asearse y la continencia. Además será dependiente en el caso de que padezca un deterioro cognitivo."

Las necesidades económicas para hacer frente a la dependencia plantean un serio problema. El seguro de dependencia va a jugar un papel fundamental para solventar estas necesidades que se ciernen sobre la sociedad del siglo XXI y que en la actualidad se están forjando. Así, podemos afirmar que el seguro de dependencia será una pieza fundamental en el mantenimiento de la calidad de vida de las personas mayores.

Debemos diferenciar la dependencia asociada al envejecimiento de la persona, donde no existen fórmulas de previsión adecuadas de la dependencia derivada de accidentes o enfermedades que afecta a personas jóvenes, donde sí existen fórmulas de cobertura tales como el seguro de invalidez. Nosotros centraremos el estudio en la primera tipología de dependencia.

El objetivo del artículo es plantear una metodología enmarcada en un modelo de múltiples estados que permita valorar cualquier estructura actuarial de prestaciones económicas (rentas y capitales asegurados) asociada a la cobertura de la dependencia. Dado que en la práctica actuarial la mayor parte de prestaciones aseguradoras se definen en periodos discretos de tiempo, hemos adoptado un modelo con

múltiples estados definido a partir de un proceso estocástico de Markov discreto en el tiempo.
La matemática basada en procesos de Markov constituye una potente herramienta de modelización que permite representar bajo un mismo enfoque cualquier tipo de estructura actuarial asociada a una operación con múltiples estados. Esto justifica que recientemente la modelización actuarial basada en la aplicación modelos de múltiples estados haya sido incorporada en el Core Syllabus de la profesión actuarial. La utilización de la matemática markoviana en operaciones aseguradoras con múltiples estados es muy prolifera. Al, respecto destacamos los trabajos de Amsler (1968), Hoem (1969), Wolthuis (1994) y Haberman y Pitacco (1999).

El trabajo se estructura en 5 secciones, además de la introducción. La sección 2 desarrolla el modelo de múltiples estados que proponemos en el trabajo. La sección 3 explica la explotación actuarial de los datos sanitarios disponibles en forma de tasas de prevalencia. En la sección 4, detallaremos las hipótesis asumidas en la obtención de las probabilidades de transición de autónomo a dependiente. La sección 5 muestra los resultados prácticos generados por la aplicación del método de construcción de tablas propuesto en el trabajo. Finalmente, la sección 6 recoge las conclusiones más relevantes que se desprenden del trabajo realizado.

## 2. MODELO DE VALORACIÓN FINANCIERO-ACTUARIAL

Para desarrollar la estructura actuarial de un seguro de dependencia planteamos un modelo de múltiples estados ($\Im$, $\wp$) donde $\Im$ representa el conjunto de estados del modelo y $\wp$ las transiciones de estados contempladas. Asumimos que el conjunto $\Im$ se define como sigue:

$$\Im = \{a, d, m\}$$

donde,

$a$ = 'Autónomo'
$d$ = 'Dependencia'
$m$ = 'Muerto'

Obsérvese como a efectos de simplificar el planteamiento teórico del modelo consideramos un único estado de dependencia. Para valorar la dependencia del asegurado existen escalas e índices geriátricos de valoración funcional y mental que resultan aplicables. Algunos índices como el de Barthel y Katz se basan en la valoración de las Actividades Básicas de la Vida Diaria (ABVD): comer, vestirse, continencia, moverse, higiene personal, ir al servicio. Otros índices, como el de Lawton, tienen en cuenta las Actividades Instrumentales de la Vida Diaria (AIVD): utilizar el teléfono, preparar la comida, cuidar la casa, lavar la ropa, etc.

El origen del riesgo de dependencia se encuentra en patologías de carácter crónico. Por ello, definimos el estado de dependencia como un estado irreversible. Es decir, consideramos que una persona dependiente no puede volver a ser autónomo. Con la aceptación de esta hipótesis el conjunto de transiciones se define como $\wp=\{a \rightarrow d, a \rightarrow m, d \rightarrow m,\}$. Gráficamente, representamos el modelo de múltiples estados $(\Im, \wp)$ a través del esquema de transiciones siguiente:

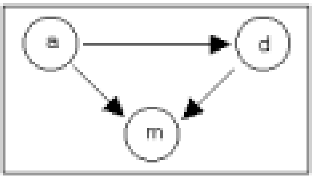


**Figura 1**. Esquema de transiciones

Llevamos a cabo un seguimiento de la evolución de estado del asegurado, de edad inicial $x$ a través de un proceso estocástico discreto y no homogéneo en el tiempo $\{S(y)\}$, donde $y = x, x+1, x+2, \ldots$ cuyas probabilidades satisfacen la conocida propiedad de Markov.

$$\begin{aligned} &\text{Prob}\,\{S\,(y+1) = s_{y+1} \;/\; S\,(y) = s_y \wedge \ldots \wedge S\,(0) = s_0\} = \\ &= \text{Prob}\,\{S\,(y+1) = s_{y+1}) \;/\; S\,(y) = s_y\,\} \end{aligned} \tag{1}$$

En la valoración actuarial de prestaciones de invalidez y de dependencia suele adoptarse la nomenclatura de Alegre, A.(1990), motivo por el cual hemos decidido mantener esta misma anotación, adaptada a la peculiaridad de la cobertura de dependencia. La siguiente tabla recoge las probabilidades anuales del modelo desarrollado.

| | $A$ | $d$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $p_y^{aa}$ | $p_y^{ad}$ | $q_y^{a}$ |
| $d$ | 0 | $p_y^{dd}$ | $q_y^{d}$ |
| $m$ | 0 | 0 | 1 |

**Tabla 1**. Matriz de transición

A modo de ejemplo, definimos algunas probabilidades de transición a partir de la evolución del proceso estocástico *S* (y):

$p_y^{aa}$ =Prob{$S\ (y+1) = a\ /\ S\ (y) = a$}    $p_y^{ad}$ =Prob{$S\ (y+1) = d\ /\ S\ (y) = a$}

Las probabilidades de transición cumplen las siguiente propiedades, todas ellas características de los procesos estocásticos de Markov.

- La suma de probabilidades de transición de un mismo estado suman la unidad, tomando cada una de ellas valores no negativos. Consecuentemente, se verifica.

$$p_y^{aa} + p_y^{ad_3} + q_y^{a} = 1 \qquad\qquad p_y^{dd} + q_y^{d} = 1$$

- Las probabilidades de transición verifican las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov para cualquier temporalidad *h*. Así, por ejemplo, se cumple.

$${}_{/h}p_y^{aa} = {}_{/h-1}p_y^{aa} \cdot p_{y+h-1}^{aa}$$
$${}_{/h}p_y^{ad} = {}_{/h-1}p_y^{ad} \cdot p_{y+h-1}^{dd} + {}_{/h-2}p_y^{ad} \cdot p_{y+h-1}^{dd}$$

Matricialmente, la ecuación de Chapman-Kolmogorov se expresa de la siguiente forma, siendo ${}_{/h}M_y$ la matriz de transición, entre las edades *y* e *y*+*h*, recogida en la tabla 1.

$$ {}_{/h}M_y = {}_{/h-1}M_y \cdot M_{y+h-1} \qquad (2) $$

La sustitución reiterada en (2) de las matrices de transición obtenidas de la ecuación de Chapman-Kolmogorov planteadas para *h*-1, *h*-2, ..., 1 permite expresar la matriz de transición entre las edades *y* e *y*+*h* a través del producto de las matrices de transición anuales de las edades comprendidas entre *y* e *y*+*h*.

$$ {}_{/h}M_y = \prod_{i=0}^{h-1} M_{y+i} \qquad (3) $$

La expresión (3) muestra cómo las ecuaciones las probabilidades temporales de *h* años se pueden generar a partir del conocimiento de las probabilidades anuales correspondientes.

## 3. OBTENCIÓN DE LA BASE ESTADÍSTICA

Una de las principales dificultades que presenta el seguro de dependencia desde un punto de vista actuarial es la ausencia de experiencia en nuestro país. Otros países, principalmente Estados Unidos y Alemania, tienen una experiencia mucho más dilatada. No obstante, sus diferencias socioculturales y de comportamiento respecto la población española dificultan su adaptación al mercado español.

La falta de datos estadísticos provenientes de experiencias aseguradoras en España nos obliga a acudir a datos sanitarios de carácter general. Al respecto, destacamos algunos estudios comprenhensivos de ámbito local: Vigo (1994), Leganés (1994) y Móstoles así como estudios nacionales y autonómicos: Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de salud (1999), Encuesta de Salud de España (1997), Encuesta de Salud de Cataluña (1994), etc. En estos estudios se analiza la tasa de prevalencia (proporción de casos sobre el total de la población considerada) de la capacidad funcional para la realización de las actividades de la vida diaria.

Los estudios de ámbito nacional y autonómico, si bien tienen interés tanto por la representatividad de la población estudiada como por el volumen de la muestra, no muestran la información desagregada por grupos de edades y sexo, requisito fundamental para un tratamiento actuarial. Por ello, para mostrar una aplicación práctica del modelo desarrollado en el artículo, hemos acudido a un estudio local como el de Vigo. Sin ser éste el estudio de mayor profundidad existente, es, según UNESPA (2001) el estudio cuyos resultados publicados son más completos y cuya información mejor se adapta a nuestro modelo actuarial. La siguiente tabla sintetiza los principales resultados alcanzados en dicho estudio.

| | 65-74 años | 75-84 años | 85+ años |
|---|---|---|---|
| Tasa de prevalencia población masculina | 0.062[3] | 0.216 | 0.478 |
| Tasa de prevalencia población femenina | 0.088 | 0.326 | 0.54 |

**Tabla 2**. Elaboración propia en base a los resultados de prevalencia sobre dependencia de la Encuesta de salud OARS-Vigo (hemos considerado un único nivel de dependencia que engloba personas con actividad funcional para las actividades de la vida diaria moderadamente deteriorada, fuerte deteriorada y totalmente deteriorada). Una información más exhaustiva del estudio la encontramos en Eiroa, P. (1996).

La siguiente función recoge un ajuste de las tasas de prevalencia de la población masculina en función de la edad, *x*. En su obtención, hemos considerado el aumento de la tasa de prevalencia que se produce en las edades extremas,aspecto no recogido por la encuenta de salud OARS-Vigo al incluir todas las personas mayores de 84 años en un solo grupo de edades.

$$\hat{\lambda}_x = -1{,}62268734 + e^{0{,}007629892 \cdot x} \tag{4}$$

[3] Una tasa de prevalencia de dependencia masculina para edades entre 65 y 74 de 0.062 representa que el 6.2 % de la población masculina comprendida entre los 65 y 75 años es dependiente.

La figura 2 representa gráficamente la función de prevalencia, $\hat{\lambda}_x$. Nótese como la función $\hat{\lambda}_x$ es una función monótonamente creciente en todo su dominio de edades lo que refleja cómo la dependencia es un fenómeno biológico cuya incidencia aumenta con la edad de la persona.

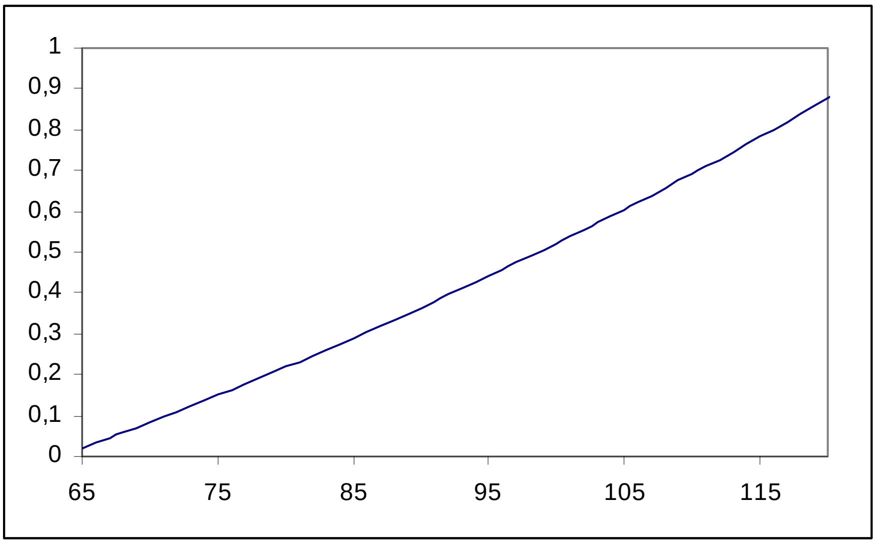


**Figura 2**. Representación gráfica de la tasa de prevalencia de la población masculina ajustada a los datos de la Encuesta de salud OARS-Vigo.

La valoración actuarial requiere del conocimiento de las probabilidades de transición, no de las tasas de prevalencia correspondientes. A continuación, explicaremos cómo, a partir de la adopción de la tabla de mortalidad LGRM95 y del conocimiento de las tasas de prevalencia $\lambda_x$, podemos calcular las correspondientes probabilidades de transición. Para ello nos basaremos en el método de conversión de tasas de prevalencia en probabilidades de transición introducido por Pitacco, E. (1995).

Suponemos una cohorte $l_x^{LGRM\,95}$ cuya evolución se adapta a la tabla de mortalidad LGRM95. El número de personas autónomas y dependientes que forman parte de la cohorte $l_x^{LGRM\,95}$ se representan como $l_x^a$ y $l_x^d$, donde, obviamente, se cumple $l_x^{LGRM95} = l_x^a + l_x^d$. De la definición de tasa de prevalencia, resultan las siguientes relaciones:

$$l_x^d = l_x^{LGRM95} \cdot \lambda_x \qquad (5)$$

$$l_x^a = l_x^{LGRM95} \cdot (1 - \lambda_x) \qquad (6)$$

La figura 3 recoge la evolución del cohorte general $l_x^{LGRM95}$ así como la del número de personas autónomas y dependientes que lo forman en cada edad.

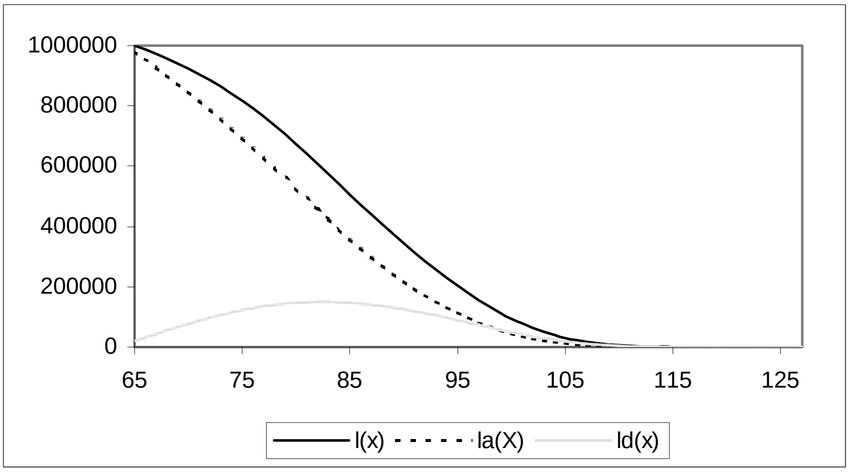


**Figura 3**. Representación gráfica de la evolución de $l_x^{LGRM95}$, $l_x^a$ y $l_x^d$

Dado que la función cohorte $l_x^{LGRM95}$ es decreciente y la tasa de prevalencia de dependencia aumenta con la edad podemos asegurar que $l_x^a$ también decrece con la edad. Las siguientes ecuaciones recurrentes describen la evolución dinámica de $l_x^a$ y $l_x^d$.

$$l_{x+1}^d = l_x^d - l_x^d \cdot q_x^d + l_x^a \cdot p_x^{ad} \qquad (7)$$

$$l_{x+1}^{a} = l_{x}^{a} - l_{x}^{a} \cdot q_{x}^{a} - l_{x}^{a} \cdot p_{x}^{ad} \qquad (8)$$

Adicionalmente, suponemos que la mortalidad de las personas dependientes, $q_x^d$, resulta de añadir a la probabilidad del fallecimiento del cohorte $l_x^{LGRM\,95}$ un recargo proporcional de mortalidad $\alpha$.

$$q_x^d = (1+\alpha) \cdot q_x^{LGRM\,95} \qquad (9)$$

## 4. CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN A DEPENDIENTE DE UN AUTÓNOMO

La probabilidad de transición anual entre los estados de autónomo y dependiente se obtiene sustituyendo la relación (9) en la ecuación (7). El resultado es la siguiente expresión:

$$p_x^{ad} = \frac{l_{x+1}^{d} - l_{x}^{d} + l_{x}^{d} \cdot (1+\alpha) \cdot q_x^{LGRM\,95}}{l_x^a} \qquad (10)$$

Una vez conocidos los valores de $p_x^{ad}$, resulta fácil deducir las probabilidades de fallecimiento de una persona autónoma.

$$q_x^a = \frac{l_x^a - l_{x+1}^a + l_x^a \cdot p_x^{ad}}{l_x^a} \qquad (11)$$

Dividiendo por $l_x^a + l_x^d$ la suma de las ecuaciones (7) y (8), obtenemos la relación (12) que expresa cómo la probabilidad de fallecimiento $q_x^{LGRM\,95}$ constituye la media de la mortalidad de las personas autónomas, $q_x^a$, y dependientes, $q_x^d$ ponderada por los pesos relativos de ambos colectivos, λ y (1-λ) respectivamente.

$$q_x^{LGRM\,95} = \lambda \cdot q_x^d + (1-\lambda) \cdot q_x^a \qquad (12)$$

## 5. PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN DE LAS TABLAS

Una vez hemos calculado las diferentes probabilidades anuales que intervienen en el modelo estamos en condiciones de generar las tablas de dependencia que nos proponíamos como objetivo inicial del trabajo. En primer lugar, presentamos las probabilidades anuales.

| x | $p_x^{aa}$ | $p_x^{ad}$ | $q_x^{a}$ | $p_x^{dd}$ | $q_x^{d}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0,9736541 | 0,0126762 | 0,0136697 | 0,9849336 | 0,0150664 |
| 66 | 0,9724607 | 0,0129476 | 0,0145917 | 0,9838960 | 0,0161040 |
| 67 | 0,9711523 | 0,0132297 | 0,0156180 | 0,9827396 | 0,0172604 |
| 68 | 0,9696884 | 0,0135232 | 0,0167884 | 0,9814197 | 0,0185803 |
| 69 | 0,9680314 | 0,0138291 | 0,0181395 | 0,9798946 | 0,0201054 |
| 70 | 0,9661458 | 0,0141486 | 0,0197056 | 0,9781253 | 0,0218747 |
| 71 | 0,9639990 | 0,0144831 | 0,0215179 | 0,9760754 | 0,0239246 |
| 72 | 0,9615698 | 0,0148346 | 0,0235956 | 0,9737219 | 0,0262781 |
| 73 | 0,9588763 | 0,0152051 | 0,0259186 | 0,9710851 | 0,0289149 |
| 74 | 0,9559447 | 0,0155969 | 0,0284585 | 0,9681947 | 0,0318053 |
| 75 | 0,9527999 | 0,0160121 | 0,0311880 | 0,9650792 | 0,0349208 |
| 76 | 0,9494657 | 0,0164531 | 0,0340812 | 0,9617654 | 0,0382346 |
| 77 | 0,9459646 | 0,0169220 | 0,0371133 | 0,9582793 | 0,0417207 |
| 78 | 0,9423179 | 0,0174213 | 0,0402608 | 0,9546452 | 0,0453548 |
| 79 | 0,9385457 | 0,0179534 | 0,0435009 | 0,9508866 | 0,0491134 |
| 80 | 0,9346669 | 0,0185206 | 0,0468125 | 0,9470254 | 0,0529746 |
| 81 | 0,9306994 | 0,0191256 | 0,0501750 | 0,9430827 | 0,0569173 |
| 82 | 0,9266601 | 0,0197711 | 0,0535688 | 0,9390784 | 0,0609216 |
| 83 | 0,9225647 | 0,0204599 | 0,0569754 | 0,9350314 | 0,0649686 |
| 84 | 0,9184277 | 0,0211950 | 0,0603773 | 0,9309594 | 0,0690406 |
| 85 | 0,9142631 | 0,0219796 | 0,0637573 | 0,9268795 | 0,0731205 |
| 86 | 0,9100834 | 0,0228170 | 0,0670996 | 0,9228075 | 0,0771925 |
| 87 | 0,9058645 | 0,0237120 | 0,0704235 | 0,9187184 | 0,0812816 |
| 88 | 0,9014431 | 0,0246735 | 0,0738834 | 0,9144302 | 0,0855698 |
| 89 | 0,8966315 | 0,0257139 | 0,0776545 | 0,9097337 | 0,0902663 |
| 90 | 0,8912538 | 0,0268481 | 0,0818982 | 0,9044320 | 0,0955680 |
| 91 | 0,8851460 | 0,0280935 | 0,0867605 | 0,8983417 | 0,1016583 |
| 92 | 0,8781551 | 0,0294708 | 0,0923741 | 0,8912911 | 0,1087089 |
| 93 | 0,8701390 | 0,0310043 | 0,0988568 | 0,8831203 | 0,1168797 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 94 | 0,8612912 | 0,0327060 | 0,1060028 | 0,8740485 | 0,1259515 |
| 95 | 0,8518936 | 0,0345835 | 0,1135229 | 0,8643958 | 0,1356042 |
| 96 | 0,8419445 | 0,0366579 | 0,1213976 | 0,8541627 | 0,1458373 |
| 97 | 0,8314415 | 0,0389535 | 0,1296050 | 0,8433488 | 0,1566512 |
| 98 | 0,8203821 | 0,0414980 | 0,1381199 | 0,8319541 | 0,1680459 |
| 99 | 0,8087634 | 0,0443232 | 0,1469134 | 0,8199788 | 0,1800212 |
| 100 | 0,7965821 | 0,0474655 | 0,1559524 | 0,8074228 | 0,1925772 |
| 101 | 0,7838342 | 0,0509673 | 0,1651985 | 0,7942860 | 0,2057140 |
| 102 | 0,7705153 | 0,0548778 | 0,1746068 | 0,7805687 | 0,2194313 |
| 103 | 0,7566201 | 0,0592547 | 0,1841251 | 0,7662706 | 0,2337294 |
| 104 | 0,7421424 | 0,0641660 | 0,1936916 | 0,7513917 | 0,2486083 |
| 105 | 0,7270749 | 0,0696925 | 0,2032327 | 0,7359324 | 0,2640676 |
| 106 | 0,7114085 | 0,0759307 | 0,2126608 | 0,7198921 | 0,2801079 |
| 107 | 0,6951327 | 0,0829972 | 0,2218700 | 0,7032713 | 0,2967287 |
| 108 | 0,6782347 | 0,0910339 | 0,2307314 | 0,6860697 | 0,3139303 |
| 109 | 0,6606983 | 0,1002155 | 0,2390862 | 0,6682874 | 0,3317126 |
| 110 | 0,6425038 | 0,1107593 | 0,2467369 | 0,6499246 | 0,3500754 |
| 111 | 0,6236262 | 0,1229390 | 0,2534348 | 0,6309809 | 0,3690191 |
| 112 | 0,6040333 | 0,1371048 | 0,2588618 | 0,6114566 | 0,3885434 |
| 113 | 0,5836839 | 0,1537116 | 0,2626045 | 0,5913515 | 0,4086485 |
| 114 | 0,5625228 | 0,1733612 | 0,2641161 | 0,5706658 | 0,4293342 |
| 115 | 0,5404757 | 0,1968671 | 0,2626571 | 0,5493993 | 0,4506007 |
| 116 | 0,5174399 | 0,2253570 | 0,2572032 | 0,5275522 | 0,4724478 |
| 117 | 0,4932684 | 0,2604393 | 0,2462924 | 0,5051244 | 0,4948756 |
| 118 | 0,4677441 | 0,3044914 | 0,2277645 | 0,4821159 | 0,5178841 |
| 119 | 0,4405323 | 0,3611808 | 0,1982869 | 0,4585268 | 0,5414732 |
| 120 | 0,4110879 | 0,4364773 | 0,1524348 | 0,4343568 | 0,5656432 |

**Tabla 3**. Tabla de probabilidades de transición calculada con un recargo de mortalidad por dependencia del 10%. respecto la mortalidad general del cohorte.

De la tabla 3 se desprenden varios resultados inmediatos. En primer lugar, observamos como la probabilidad de contraer dependencia crece con la edad. También, podemos apreciar cómo, consecuencia de las hipótesis aceptadas, la mortalidad de las personas dependientes es mayor en cifras absolutas que la de las personas autónomas y cómo esta diferencia se hace mayor con el transcurso de la edad.

Una vez obtenidas las probabilidades de transición anuales, procedemos a generar las probabilidades de transición temporales para una edad $x$ en particular. Para ello aplicaremos el desarrollo matricial de la propiedad de Chapman-Kolmogorov que verifica todo proceso estocástico de Markov, recogida en la expresión (3).

| x | t = 5 | t = 10 | t = 20 | t = 30 | t = 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0.894719 | 0.750232 | 0.352724 | 0.117521 | 0.014195 |
| 70 | 0.820910 | 0.621304 | 0.258524 | 0.053109 | 0.002312 |
| 75 | 0.756848 | 0.516937 | 0.163505 | 0.017477 | 0.000224 |
| 80 | 0.683012 | 0.416099 | 0.085479 | 0.003721 | 0.000008 |

**Tabla 4**. Tabla de probabilidades temporales de permanencia en el estado de autónomo ${}_{/t}\,p_x^{aa}$

| x | t = 5 | t = 10 | t = 20 | t = 30 | t = 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0.028903 | 0.067598 | 0.154860 | 0.087471 | 0.017044 |
| 70 | 0.065021 | 0.109621 | 0.117672 | 0.050736 | 0.004837 |
| 75 | 0.069584 | 0.107548 | 0.091487 | 0.022175 | 0.000736 |
| 80 | 0.074978 | 0.105189 | 0.061667 | 0.006801 | 0.000055 |

**Tabla 5**. Tabla de probabilidades temporales de transición del estado autónomo a dependiente ${}_{/t}\,p_x^{ad}$

| x | t = 5 | t = 10 | t = 20 | t = 30 | t = 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0.076378 | 0.182169 | 0.492415 | 0.795008 | 0.968762 |
| 70 | 0.114069 | 0.269075 | 0.623804 | 0.896155 | 0.992851 |
| 75 | 0.173568 | 0.375515 | 0.745007 | 0.960348 | 0.999040 |
| 80 | 0.242010 | 0.478712 | 0.852853 | 0.989479 | 0.999937 |

**Tabla 6**. Tabla de probabilidades temporales de fallecimiento de un autónomo ${}_{/t}\,q_x^{a}$

| x | t = 5 | t = 10 | t = 20 | t = 30 | t = 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0.915859 | 0.800500 | 0.471875 | 0.172425 | 0.021111 |
| 70 | 0.874043 | 0.705712 | 0.336806 | 0.079971 | 0.003938 |
| 75 | 0.807412 | 0.589475 | 0.215397 | 0.026372 | 0.000381 |
| 80 | 0.730080 | 0.477256 | 0.113320 | 0.005580 | 0.000015 |

**Tabla 7**. Tabla de probabilidades temporales de permanencia como dependiente ${}_{/t}\,p_x^{dd}$

| X | t = 5 | t = 10 | t = 20 | t = 30 | t = 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 0.084141 | 0.199500 | 0.528125 | 0.827575 | 0.978889 |
| 70 | 0.125957 | 0.294288 | 0.663194 | 0.920029 | 0.996062 |
| 75 | 0.192588 | 0.410525 | 0.784603 | 0.973628 | 0.999619 |
| 80 | 0.269920 | 0.522744 | 0.886680 | 0.994420 | 0.999985 |

**Tabla 8**. Tabla de probabilidades temporales de fallecimiento de un dependiente ${}_{/t}q_x^d$

## 6. CONCLUSIONES

En España, la cobertura aseguradora del riesgo de dependencia plantea el problema de la escasez de datos estadísticos cuya explotación actuarial permita una tabulación de las probabilidades de dependencia en base a experiencias aseguradoras propias. Esta falta de datos nos obliga a acudir a estadísticas sanitarias de carácter general basadas en el estudio de la incidencia de la dependencia, cuantificada en forma de tasa de prevalencia (proporción de casos sobre el total de la población considerada).

El presente trabajo plantea la aplicación de una estructura probabilístico-actuarial de análisis transversal que permite la construcción de tablas de dependencia a partir del conocimiento de las tasas de prevalencia de dependencia. El resultado es un modelo estocástico markoviano con múltiples estados. Su introducción en la valoración actuarial permitirá hallar primas y reservas matemáticas de coberturas aseguradoras del riesgo de dependencia. Para mostrar una aplicación práctica del modelo desarrollado, hemos acudido a los datos proporcionados por la encuesta de salud OARS.

La generalización del modelo presentado a más estados de dependencia permite la obtención de tablas de dependencia que consideren diferentes niveles de gravedad de la misma. Para ello, necesitaremos conocer las tasas de incidencia de dependencia clasificadas por su nivel de severidad, además de por edades y sexo.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

**ALEGRE, A. (1990), '***Valoración actuarial de prestaciones relacionadas con la invalidez'*. Publicaciones Universitat de Barcelona. Barcelona.

**AMSLER, M.H. (1968)**, '*Les chaînes de Markov des assurances vie, invalidité et maladie'*. Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, Mónaco, vol 5, pp 731-746.

**EIROA, P. et al. (1996),** '*Discapacidades y necesidades de servicios en las personas mayores detectadas en la encuesta de salud OARS-Vigo'*. Medicina Clínica. Número 106. Barcelona

**HABERMAN, S. Y PITACCO, E. (1999)**, '*Actuarial models for disability insurance'*. Chapman and Hall. Londres.

**HOEM, J.M. (1969)**, '*Markov chain models in life insurance'*. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematiker IX, no 2, pp 91-107.

**INE., (2000)**, '*Encuesta sobre Discapacidades, Deficiencias y Estado de salud de 1999'*. Madrid

**INE., (2001)**, '*Proyecciones de población'*. Madrid.

**PITACCO, E. (1995)**, '*Modelli attuariali per le assicurazioni sulla salute'*. CERAP. Milano

**RIVERA, J. (2001)**, '*El seguro de dependencia'*. Actuarios.Madrid.

**RODRÍGUEZ, G. (2000)**, '*La protección social de la dependencia. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales'*. Servicios Sociales. Madrid.

**UNESPA (2001)**, '*Seguro de dependencia: estimación del nivel de dependencia, necesidades de recursos y proyecciones de futuro'*.

**WOLTHUIS, H (1994)**, '*Life insurance Mathematics (The Markovian model)'*. CAIRE Education series n. 2. University of Amsterdam. Bruselas.