RIESGO DE INTERÉS DE LAS OPERACIONES ACTUARIALES CLÁSICAS: UNA VALORACIÓN A TRAVÉS DE LA DURACIÓN

J. Iñaki De La Peña Esteban[1]
Instituto de Estudios Financiero-Actuariales
Universidad del País Vasco

RESUMEN

En el presente trabajo nos proponemos realizar un enfoque actuarial a la duración que habitualmente viene siendo empleada en la renta fija bajo los enfoques tanto financiero de Macaulay como económico de Hicks. Sin embargo, no hay que olvidar que en el campo actuarial los flujos son estocásticos, por lo que la derivación de la duración debe de partir de una óptica probabilística, adquiriendo una denominación propia: duración esperada.

Adicionalmente y ante la hipótesis de curva de interés plana, que en el mundo asegurador más que una hipótesis es un hecho real, intentaremos determinar las expresiones de la duración esperada de las operaciones actuariales más simples y clásicas, las cuales nos permitirán calcular la influencia que las variaciones del tipo de interés tienen sobre las provisiones matemáticas.

Su valor aproximado lo contrastaremos ante el valor real en un análisis práctico que nos demostrará la aplicabilidad de la duración esperada.

---

[1] Profesor Titular de la Universidad del País Vasco.
Instituto de Estudios Financiero-Actuariales.
Avenida Lehendakari Agirre, 83.
48.015 – BILBAO.
Email: efppeesi@bs.ehu.es

PALABRAS CLAVE

Duración, riesgo de interés, gestión activo y pasivos, inmunización.

1. INTRODUCCIÓN

Tanto los profesionales del mundo asegurador como los académicos están de acuerdo en la existencia de la influencia del las variaciones del tipo de interés sobre las inversiones realizadas siendo una de las variables de mercado más decisivas. Este protagonismo es incluso mayor en épocas de alta volatilidad en los tipos de interés.

En el activo de las entidades aseguradoras y entre sus inversiones está demostrada la existencia de una relación inversa entre el tipo de interés y el precio de mercado de los activos en los que invierte, de forma que un incremento de estos tipos de interés se asocia con bajadas en los mercados de valores y, por el contrario, un descenso de los tipos de interés suele llevar parejo un incremento de los precios de los activos financieros.

Así mismo, el tipo de interés es una variable básica dentro del coste del propio negocio asegurador y es habitualmente contemplado como el mínimo nivel de inversión real y de crecimiento, influenciando igualmente la expectativa de crecimiento empresarial así como el reparto de dividendos a sus accionistas.

En este contexto el análisis del riesgo de interés en las inversiones (renta fija mayormente) ha sido tratado ampliamente a través del concepto de la Duración y la Convexidad. De hecho, desde su aparición se ha convertido en una herramienta habitual dentro del análisis de inversiones y en la gestión del riesgo de interés del activo de la entidad aseguradora.

Este parámetro se emplea en la gestión de activos y pasivos en el marco de las estrategias inmunizadoras cuyo fin es el de controlar la exposición al riesgo de interés y, en su caso, cuantificar las posibles pérdidas que puede causar una variación adversa de estos tipos de interés.

Realmente la Duración nos expresa la medida del riesgo o variación del valor de la cartera de inversiones ante variaciones del tipo de interés que afectan al activo financiero. De hecho cuanto mayor sea la variación del tipo de interés, mayor será la variación del activo ante esos movimientos.

De forma natural y desde una óptica financiera el concepto de Duración y Convexidad ha empezado a extenderse también al pasivo de la entidad aseguradora, entendido como una medida de sensibilidad del valor de mercado de ese pasivo (obligaciones contractuales de pago de la entidad aseguradora) ante los cambios de los tipos de interés, aplicando los mismos principios que conllevaron a su paulatina introducción en la renta fija, así como a las conclusiones que se derivan, como son que la Duración del pasivo de una empresa aseguradora, esto es, la duración de sus compromisos de pago, constituye la base para un análisis de la gestión del riesgo de interés y que nos permite desarrollar una o varias estrategias inmunizadoras, acorde a las expectativas del ente inversor.

Adicionalmente el conocimiento de la variación que experimente cada línea de negocio de la entidad aseguradora con respecto a la variación del tipo de interés nos permitirá diseñar unas estrategias de selección de inversiones más activas que las diseñadas respecto a una inmunización clásica.

En todo caso, hay que señalar que el nivel de investigación en el campo de las operaciones actuariales sobre la aplicación de la Duración comparativamente con el llevado a cabo en la renta fija ha sido notoriamente inferior y puede obedecer a la dificultad que provoca la naturaleza probabilística de los flujos económicos de pago que generan los seguros que habitualmente comercializan las empresas aseguradoras.

El objetivo fundamental de este trabajo se centra precisamente en el enfoque actuarial de la Duración y en la determinación de la Duración en aquellas operaciones actuariales más simples y más clásicas dentro del sector asegurador ante variaciones en los tipos de interés, teniendo en cuenta que estas operaciones suelen estar emitidas bajo una estructura de tipos de interés plana.

2. OBJETO DEL TRABAJO

El concepto de duración de un activo financiero fue inicialmente introducido por *Macaulay* [Macaulay, 1938] bajo un enfoque financiero, así como por *Hicks* [Hicks, 1939] bajo una óptica económica.

Por una parte *Macaulay* considera la Duración como la medida de la vida media de los activos, siendo más eficiente este parámetro que el plazo del activo hasta su vencimiento. Concretamente la define como el vencimiento medio ponderado de los flujos económicos generados por el activo financiero, siendo el factor de ponderación el valor actual financiero de cada flujo económico generado sobre el precio de mercado de dicho activo financiero.

Hikcs, por otra parte, dota de un enfoque económico a la Duración interpretándola como la elasticidad del precio del activo financiero ante cambios en el tipo de interés.

Posteriormente *Redington* [Redington, 1952] establece los principios que llevan a la hoy conocida inmunización en los que asevera en sus dos legados que

Regla 1 : *El valor medio de los activos debe igualar al valor medio de los compromisos de pago*.

Regla 2 : *La dispersión sobre el valor medio de los activos debe ser mayor que la dispersión sobre el valor medio de los pagos.*

El desarrollo posterior se ha basado principalmente en el empleo de la Duración en el activo de la compañía aseguradora. De esta forma autores como *Bierwag y otros* [1977, 1978, 1990 y 1991], *Leibowitz* [1986, *a* y *b*] aplicándola a la inmunización, *Fabozzi* [1995], *Toevs* [1986] en la renta fija, etc., han desarrollado el empleo de la Duración en el activo pero no se ha ahondado en el campo del pasivo de la entidad aseguradora, salvo escasas intervenciones [*Li & Panjer*, 1994].

En el presente trabajo intentamos buscar las expresiones más sencillas de la Duración para una estructura de tipo de interés plana (bajo la cual se suelen comercializar la mayoría de los productos aseguradores hoy en día) de aquellas operaciones actuariales más clásicas, incorporando en su cálculo los símbolos de conmutación, que aunque paulatinamente están cayendo en desuso a favor del empleo de herramientas informáticas prediseñadas, consiguen darnos una rápida información de los compromisos asegurados, así de cómo se ven afectados ante pequeñas variaciones en los tipos de interés con los que se comercializan. Esto es, cómo se ven afectadas las provisiones matemáticas contractualmente reflejadas en el balance de la compañía aseguradora.

El empleo de una estructura de tipos de interés plana se debe a las siguientes razones:

- El empleo de una estructura de tipos de interés plana nos permite deducir expresiones actuariales básicas tanto en el valor actuarial de las prestaciones como en el valor actuarial de las aportaciones con lo que también nos permitirá su empleo en el cálculo de la Duración.

- El empleo de un tipo de interés constante nos facilita el empleo de los símbolos de conmutación más habituales permitiéndonos calcular directamente la influencia económica que tiene una variación instantánea de ese tipo de interés técnico sobre el valor actuarial de los compromisos asumidos.

- El producto actuarial clásico es comercializado bajo una asunción de tipo de interés técnico constante, conservador y a futuro, cuando no está fijado por ley, lo cual hace que el empleo de la hipótesis de estructura de tipo de interés plana sea una realidad en el sector asegurador, y los cambios legales del tipo de interés técnico sean cambios instantáneos de la estructura de tipos de interés, esto es, conlleve desplazamientos paralelos.

3. LA DURACIÓN ESPERADA

El concepto de Duración que se emplea para los activos financieros de renta fija se basa en una corriente de flujos económicos invariables a lo largo del tiempo. Sin embargo en las operaciones actuariales la frecuencia de ocurrencia y el volumen de pago a realizar es estocástico. De hecho la mayoría de los seguros y rentas actuariales se basan en pagos a realizar ante la ocurrencia o no de un evento de muerte o supervivencia.

En esta sección intentaremos definir el concepto de Duración Esperada a través de un enfoque actuarial frente a los enfoques ya conocidos: financiero y económico. Determinaremos su expresión, en base a la dependencia del factor aleatorio, pero bajo la premisa que el pago a realizar es conocido en el caso de que se dé la contingencia contemplada, como es habitual en el negocio de vida. De hecho la mayoría de los productos de las compañías aseguradoras se englobarían dentro de esta categoría.

3.1. Enfoque actuarial

Partamos de un modelo general en el que la cuantía y el tiempo se ven afectados por el momento del evento aleatorio. Para una persona de edad x, su vida residual o su tiempo de vida hasta la muerte es una variable aleatoria que la representamos por T_x . Siendo G_x su función de distribución tal que,

$$G_x(t) = P(T_x \leq t) \qquad t \geq 0$$

es la probabilidad de que una persona viva a la edad x, fallezca en el transcurso de t años, esto es, antes de cumplir la edad $x+t$. Su función de densidad $g_x(t)$ es,

$$g_x(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)}\right) = -\frac{s'(x+t)}{s(x)}$$

donde *s(x)* nos indica la probabilidad de un recién nacido alcance con vida la edad *x*.

Suponemos que en el instante *t* se realiza un pago $b(t) \geq 0$ que será abonado al fallecimiento y en el que la función de densidad es *g(t)*. Así mismo, *v(t)* es el correspondiente factor de actualización financiero desde el instante *t*-ésimo al origen o momento inicial.

El valor actual de un pago *t*-ésimo será:

$$Z_T = b_T \cdot v_T$$

que también será una variable aleatoria ya que ambas magnitudes b_T y v_T dependen de la variable aleatoria del tiempo de vida hasta la muerte (T_x). Si conocemos la función de pago, la de actualización financiera y la función de densidad, podemos determinar el valor esperado de los pagos (supuesto una duración de la operación a vida entera) o valor actuarial como

$$L_0 = E(Z_T) = E(b_T \cdot v_T) = \\ = \int_0^\infty b_t \cdot v^t \cdot g(t) \cdot dt$$

Podemos definir la Duración Esperada (*DE*) de este pago incierto al fallecimiento como el tiempo medio de pago. Esto es:

$$DE = \frac{E(T \cdot Z_T)}{L_0}$$

Siendo

$$E(T \cdot Z_T) = \int_0^\infty t \cdot b_t \cdot v^t \cdot g(t) \cdot dt$$

y por tanto obtendríamos la expresión de la duración esperada del pago al fallecimiento:

$$DE = \frac{\int_0^\infty t \cdot b_t \cdot v^t \cdot g(t) \cdot dt}{\int_0^\infty b_t \cdot v^t \cdot g(t) \cdot dt}$$

3.2. Enfoque económico

Cuando el tipo de interés es constante el valor actuarial quedaría,

$$L_0 = \int_0^\infty b_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot g(t) \cdot dt$$

Y la derivada con respecto al tipo de interés constante nos indicaría su sensibilidad respecto a un cambio en éste:

$$\frac{\partial L_0}{\partial i} = -\int_0^\infty t \cdot b_t \cdot (1+i)^{-t-1} \cdot g(t) \cdot dt$$

Despejando,

$$-(1+i) \cdot \frac{\partial L_0}{\partial i} = \int_0^\infty t \cdot b_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot g(t) \cdot dt$$

Si dividimos ambos miembros entre el valor actuarial del pago probable

$$\frac{-(1+i)}{L_0} \cdot \frac{\partial L_0}{\partial i} = \frac{\int_0^\infty t \cdot b_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot g(t) \cdot dt}{L_0}$$

Esto es, la Duración Esperada cuando los tipos de interés son constantes. Obsérvese que el primer miembro de la ecuación nos indica la definición de la elasticidad del valor actuarial ante una variación del tipo de interés. Esto es, la Duración definida según *Hicks* en 1939.

3.3. Enfoque financiero

Una variación del tipo de interés provocará una variación en la valoración financiera de los compromisos de pago.

El pago probable en el momento *t*-ésimo será:

$$L_t = b_t \cdot g(t)$$

y el valor actual de dichos pagos vendrá determinado para un tipo de interés constante como:

$$L(i)_0 = \int_0^{\infty} L_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot dt$$

De esta forma, dado el valor financiero de los pagos probables futuros determinados en una fecha dada, si existe una mínima variación en el tipo de rentabilidad de mercado (e), el valor de las obligaciones asumidas cambiará a $L(i+e)_0$. En este caso, podemos encontrar su nuevo valor mediante una aproximación de MacLaurin para tres términos, donde la función es $L(i+ e)_0$. En el límite a cero de ese valor incremental tendremos,

$$L(i+e)_0 = L(i)_0 + \frac{\partial\, L(i)_0}{\partial d\;\; i} \cdot e + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\; L(i)_0}{\partial\;\; i^2} \cdot e^2$$

La primera derivada del valor de los pagos probables respecto al riesgo de interés viene dada como,

$$\frac{\partial\;\; L(i)_0}{\partial\;\; i} = -\int_0^{\infty} t \cdot L_t \cdot (1+i)^{-t-1} \cdot dt$$

La segunda derivada, respecto al mismo factor es:

$$\frac{\partial^2\;\; L(i)_0}{\partial\;\; i^2} = \int_0^{\infty} t \cdot \left(t+1\right) \cdot L_t \cdot (1+i)^{-t-2} \cdot dt$$

Quedando el valor de los pagos probables futuros cuando existe un mínimo cambio del valor del interés de mercado:

$$L(i+e)_0 = L(i)_0 - \int_0^{\infty} t \cdot L_t \cdot (1+i)^{-t-1} \cdot dt \cdot e + \int_0^{\infty} t \cdot (t+1) \cdot L_t \cdot (1+i)^{-t-2} \cdot dt \cdot e^2$$

La variación que experimenta el valor de estas obligaciones debido a una alteración del tipo de interés vendrá dada como:

$$\Delta L = \frac{L(i+e)_0 - L(i)_0}{L(i)_0}$$

sustituyendo y simplificando:

$$\Delta L = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot L_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot dt}{\int_0^{\infty} L_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot dt} \cdot \frac{-1}{1+i} \cdot e + \frac{\int_0^{\infty} t \cdot (t+1) \cdot L_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot dt}{\int_0^{\infty} L_t \cdot (1+i)^{-t} \cdot dt} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot e^2$$

es decir,

$$\Delta L = -DE \cdot \frac{e}{(1+i)} + CXE \cdot \frac{e^2}{2 \cdot (1+i)^2}$$

donde el primer término del segundo miembro hace referencia a la Duración Esperada (*DE*) y el segundo término del segundo miembro se refiere a la Convexidad Esperada (*CXE*) de los pagos probables futuros asumidos, ante a variaciones del tipo de interés. Por lo tanto, la Duración Esperada de un conjunto de pagos asumidos por una entidad aseguradora en su negocio vendrá dado por la expresión:

$$DE = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot L_t \cdot v^t \cdot dt}{\int_0^{\infty} L_t \cdot v^t \cdot dt}$$

para una estructura de tipos de interés de mercado plana de valor *i*.

3.4. Nuevo valor actuarial

El nuevo valor actual actuarial que tomarían el conjunto de compromisos futuros cuando existe una variación del tipo de interés de mercado *e*, empleando la Duración Esperada vendrá dado como,

$$\frac{L(i+e)_0 - L(i)_0}{L(i)_0} = -DE \cdot \frac{e}{1+i}$$

luego,

$$L(i+e)_0 = L(i)_0 \cdot \left(1 - DE \cdot \frac{e}{1+i}\right)$$

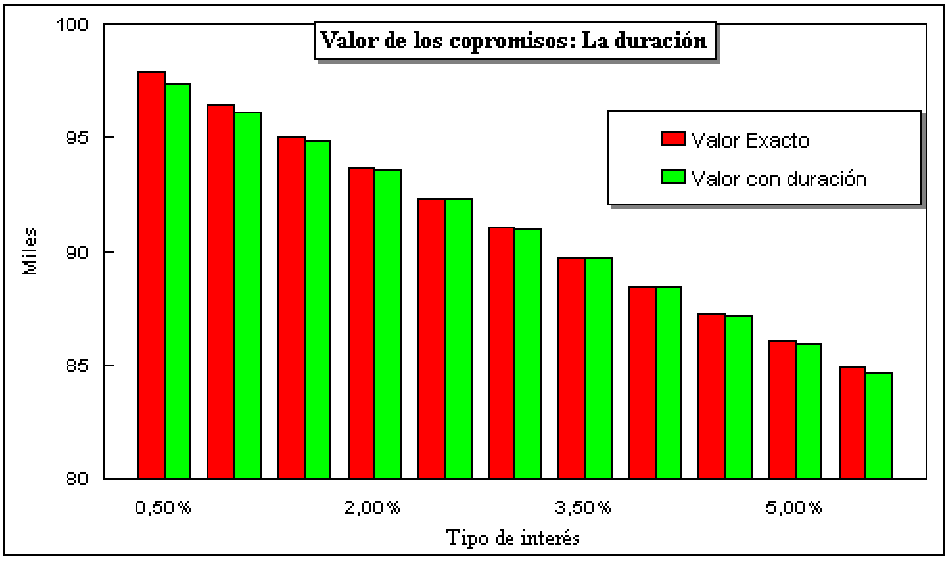
Esta expresión nos permite determinar el nuevo valor que tomarán estos compromisos ante variaciones del tipo de interés. Si en este desarrollo incluimos más términos, lograremos una aproximación mejor que si sólo empleamos la Duración Esperada o si utilizamos la Duración y la Convexidad Esperada para determinar el cambio del valor de las obligaciones respecto a la variación del interés, aunque incrementa la dificultad para su aplicación práctica.

4. CARACTERÍSTICAS

Como características genéricas más importantes que podemos mencionar de la Duración Esperada tenemos:

1. Una variación del tipo de interés influye en la valoración financiera de la operación actuarial y, en ese sentido, es una medida correcta para expresar la sensibilidad del pago probable ante fluctuaciones del tipo de interés.

2. Si los pagos a realizar son periódicos, por ejemplo, una renta temporal, el riesgo de interés afectará a estas magnitudes y, por tanto, el valor financiero de los pagos será diferente al inicialmente establecido.



3. Si la operación actuarial consiste en un único pago en *s*, entonces su Duración Esperada es *s* y esta operación es insensible a las fluctuaciones que experimente el tipo de interés. De esta forma, para un individuo de edad *x*, al que se le abone un capital *C*, en el caso de que esté vivo dentro de *s* años, tendrá una Duración Esperada igual al momento de vencimiento del capital que se debe abonar. Es decir, *s*:

$$DE = \frac{s \cdot C \cdot {}_s p_x^m \cdot v^s}{C \cdot {}_s p_x^m \cdot v^s} = s$$

4. Si la operación actuarial consiste en una serie de pagos entre *0* y *s*, entonces la Duración Esperada tomará un valor comprendido en el intervalo de *0* hasta *s*, y una variación del tipo de interés influirá en su valoración. En el caso de que se tuviese contratada una renta temporal constante por un importe anual de *C*, a favor de un beneficiario de edad *x* y a percibir al final de cada año y por *s* años, la Duración Esperada vendría dada como:

$$DE = \frac{1 \cdot C \cdot_{1} p_x^m \cdot v^1 + 2 \cdot C \cdot_{2} p_x^m \cdot v^2 + \ \dots \ + s \cdot C \cdot_{s} p_x^m \cdot v^s}{C \cdot_{1} p_x^m \cdot v^1 + C \cdot_{2} p_x^m \cdot v^2 + \ \dots \ + C \cdot_{s} p_x^m \cdot v^s} = \frac{(\boldsymbol{Ia})^{\boldsymbol{m}}_{x:\overline{s|}}}{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}_{x:\overline{s|}}}$$

El numerador queda definido a través de una renta actuarial *increasing* y el denominador por una renta actuarial constante, ambas a igual plazo.

5. La Duración Esperada varía en forma inversa al tipo de interés. Esto es, que ante fluctuaciones al alza, la Duración Esperada disminuye y si se producen disminuciones en el tipo de interés, entonces el valor de la Duración Esperada se incrementa.

En los siguientes epígrafes procedemos a determinar los valores de la Duración Esperada para las operaciones actuariales más clásicas indicando su valor final en símbolos de conmutación generalmente empleados.

5. CAPITALES DIFERIDOS

5.1. Definición

Esta operación clásica de seguro de vida consiste en el abono de un capital al asegurado al alcanzar vivo una edad determinada. En caso de que fallezca no se abona cantidad alguna. Es la operación actuarial más simple. El cálculo se realiza a un determinado tipo de interés técnico por lo que se garantiza al menos esa rentabilidad en el caso de que el asegurado viva y perciba ese capital.

Se tiene en cuenta la cuantía a abonar (suponemos una unidad monetaria) así como la probabilidad de que el asegurado alcance dicha edad.

$$L(i)_t = (1+i)^{-s+t} \cdot {}_{s-t} p_x = {}_{s-t} E_x = \frac{D_{x+s-t}}{D_x}$$

5.2. Duración Esperada

A través de la formulación general,

$$DE = \frac{(s-t)\,{}_{s-t}E_x}{L(i)_t} = \frac{(s-t)\,{}_{s-t}E_x}{{}_{s-t}E_x} = s-t$$

Lógicamente la duración esperada de un único pago probable a un plazo de *s*-*t* años es precisamente ese plazo *s*-*t*.

5.3. Convexidad Esperada

A través de la formulación general de la convexidad esperada ante una variación del tipo de interés y para una estructura de interés plana:

$$CXE = \frac{\sum_{h=t+1}^{s}(h-t)\cdot(h-t+1)\cdot L_h\cdot(1+i)^{-h+t}}{L(i)_t} = \frac{(s-t)\cdot(s-t+1)\cdot{}_{s-t}E_x}{L(i)_t} = \frac{(s-t)\cdot(s-t+1)\cdot{}_{s-t}E_x}{{}_{s-t}E_x} =$$
$$= (s-t)\cdot(s-t+1)$$

6. RENTAS PERIÓDICAS

6.1. Definición

Las rentas consisten en un conjunto de capitales con vencimientos equidistantes cuyo pago se realiza siempre que el asegurado se encuentre con vida en el momento del cobro. La función de renta permite valorar una serie de capitales con sentido financiero-actuarial, incluyendo la incidencia conjunta de la función financiera y la probabilidad de supervivencia.

Todos los capitales que conforman la renta pueden ser de igual cuantía (constantes) o pueden variar periódicamente, siguiendo una determinada ley de variación (geométrica, aritmética, polinómica, etc.)

Igualmente, la renta actuarial puede ser vitalicia (pagadera durante toda la vida), temporal (limitada a un número *n* de años). Es de destacar que los vencimientos de los capitales pueden comenzar en el mismo momento en el que se valora (inmediata) o bien tras un periodo de tiempo (diferidas). Además, estos pagos pueden abonarse dentro de su periodo de referencia, al final de ese periodo (pospagable o por vencido) o al inicio de tal periodo (prepagable o por anticipado).

Únicamente tratamos a continuación aquellas rentas constantes más simples que son aquellas para las que podemos encontrar expresiones simplificadoras del cálculo de la Duración Esperada.

6.2. Duración Esperada

Ponderamos temporalmente el importe económico actualizado correspondiente a la renta, por lo que se obtiene en el numerador una renta variable en progresión aritmética de razón la unidad, más conocida en la matemática actuarial como renta *increasing*. También en este punto distinguimos entre las rentas vitalicias y temporales, y dentro de estas entre prepagables o pospagables

6.2.1.Renta vitalicia

Recordamos que son aquellas cuyo pago se realiza siempre que el asegurado se encuentre vivo, no existiendo ningún límite temporal. La Duración Esperada de estas rentas podría pensarse que tiende a infinito, sin embargo a medida que pasa el tiempo la probabilidad de supervivencia del asegurado es cada vez menor, por lo que converge a un valor cierto y finito.

- *Rentas prepagables*

El abono de la prestación unitaria se realiza por adelantado o al principio de cada periodo. Tenemos la paradoja de que en el momento inicial o momento *0* se produce un pago, luego su valor será nulo en el cálculo del numerador de la Duración. Veamos su cálculo a través de la formulación general:

$$DE = \frac{0 \cdot {}_0p_x \cdot v^0 + 1 \cdot {}_1p_x \cdot v^1 + 2 \cdot {}_2p_x \cdot v^2 + 3 \cdot {}_3p_x \cdot v^2 + \cdots}{L(i)_0} = \frac{\boldsymbol{(Ia)_x}}{\boldsymbol{\ddot{a}_x}}$$

En símbolos de conmutación al tanto de interés constante *i*, sería:

$$DE = \frac{S_{x+1}}{N_x}$$

En caso de estar empleando rentas constantes fraccionadas, la renta *increasing* fraccionada la expresamos como una aproximación lineal de dos rentas sin fraccionar. Cuando su valor es una unidad monetaria:

$$\boldsymbol{(I\ddot{a})_x^{(t)}} = \frac{t+1}{2 \cdot t} \cdot \boldsymbol{(I\ddot{a})_x} + \frac{t-1}{2 \cdot t} \cdot \boldsymbol{(Ia)_x}$$

Con lo que también podemos llegar a una expresión de la duración esperada más sencilla en su cálculo.

- *Rentas pospagables*

En este caso los abonos de las prestaciones periódicas se realizan al final de cada periodo. Ponderando con el momento de pago correspondiente, obtenemos la expresión que nos permite calcular de forma sencilla la duración esperada de una renta vitalicia pospagable.

$$DE = \frac{1 \cdot {}_1p_x \cdot v^1 + 2 \cdot {}_2p_x \cdot v^2 + 3 \cdot {}_3p_x \cdot v^2 + \cdots}{L(i)_0} = \frac{\boldsymbol{(Ia)_x}}{\boldsymbol{a_x}}$$

En función de símbolos de conmutación determinamos su Duración Esperada:

$$DE = \frac{S_{x+1}}{N_{x+1}}$$

Cuando consideramos la renta fraccionada, la interpolación lineal resultante es,

$$(Ia)_x^{(t)} = \frac{t+1}{2\cdot t}\cdot (Ia)_x + \frac{t-1}{2\cdot t}\cdot (I\ddot{a})_x$$

Lo cual nos permite desarrollar una formulación específica y su valor en símbolos de conmutación para la Duración Esperada.

6.2.2.Renta Temporal

La temporalidad de estos pagos se da al ocurrir el primero de estos dos hechos: El fallecimiento del asegurado o alcanzar una determinada edad, límite prefijado para percibir las prestaciones. Dependiendo del vencimiento de cada término de la renta, el cálculo de la Duración Esperada es diferente.

- *Rentas prepagables*

Si los términos se abonan al principio de cada periodo tendremos una Duración Esperada de:

$$DE = \frac{0\cdot{}_0p_x\cdot v^0 + 1\cdot{}_1p_x\cdot v^1 + 2\cdot{}_2p_x\cdot v^2 + \cdots + (n-1)\cdot{}_{n-1}p_x\cdot v^{n-1}}{L(i)_0} =$$

$$= \frac{(Ia)_{x:\overline{n-1|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\cdot N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

La renta *increasing* de considerar un pago fraccionado en *t*-ésimos de año vendría dada con una unidad monetaria como primer término:

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}^{(t)} = \frac{t+1}{2\cdot t}\cdot (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} + \frac{t-1}{2\cdot t}\cdot (Ia)_{x:\overline{n|}}$$

Pudiendo obtener una expresión propia para la duración esperada correspondiente.

- *Rentas pospagables*

Para una renta pospagable y temporal, la Duración Esperada se determinaría a través de la división de la renta *increasing* temporal entre el valor de dicha renta constante temporal:

$$DE = \frac{1 \cdot {}_1p_x \cdot v^1 + 2 \cdot {}_2p_x \cdot v^2 + \cdots + n \cdot {}_np_x \cdot v^n}{L(i)_0} = \frac{(\boldsymbol{Ia})_{x:\overline{n|}}}{\boldsymbol{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n \cdot N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+n+1}}$$

Igualmente con pagos fraccionados tendríamos una renta *increasing*

$$(\boldsymbol{Ia})^{(t)}_{x:\overline{n|}} = \frac{t+1}{2 \cdot t} \cdot (\boldsymbol{Ia})_{x:\overline{n|}} + \frac{t-1}{2 \cdot t} \cdot (\boldsymbol{I\ddot{a}})_{x:\overline{n|}}$$

combinación lineal de dos rentas de igual características, prepagable y pospagable, pero sin fraccionar.

6.2.3.Renta diferida

En estas rentas el abono de la prestación ocurre *t* periodos después de contratarse por lo que en el numerador de la Duración Esperada se definirá una renta actuarial de términos variables en progresión aritmética de primer término *t* y de razón de variación aritmética, la unidad de tiempo.

6.2.3.1. Renta diferida y vitalicia

Al ser diferida y vitalicia, el abono de la prestación se realiza siempre que el asegurado se encuentre vivo tras *t* periodos, no existiendo límite temporal de cobro. La Duración Esperada de esta serie de pagos si fuesen prepagables vendría determinada como,

$$DE = \frac{t \cdot {}_tp_x \cdot v^t + (t+1) \cdot {}_{t+1}p_x \cdot v^{t+1} + (t+2) \cdot {}_{t+2}p_x \cdot v^{t+2} + \cdots}{L(i)_0} = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{V\ddot{a}}(t;1)_{\boldsymbol{x}}}{{}^{t}/\boldsymbol{\ddot{a}}_{\boldsymbol{x}}}$$

En símbolos de conmutación[2], tras simplificar, resultaría un cálculo extremadamente sencillo:

$$DE = t + \frac{S_{x+t+1}}{N_{x+t}}$$

Si los pagos fuesen pospagables[3] la Duración Esperada vendría determinada como,

$$DE = t + 1 + \frac{S_{x+t+2}}{N_{x+t+1}}$$

6.2.3.2.Renta diferida y temporal

El abono de la prestación se realiza siempre que el asegurado se encuentre vivo una vez hayan pasado *t* periodos (periodo de diferimiento) y durante un máximo de *n* periodos. La duración esperada de esta serie de compromisos probables asumidos si fuesen prepagables queda definido por el cociente de una renta temporal

---

2 Ambas rentas en símbolos de conmutación serían:

$$\boldsymbol{V\ddot{a}}(t;1)_{\boldsymbol{x+t}} = t \cdot \boldsymbol{\ddot{a}}_{\boldsymbol{x+t}} + 1 \cdot \sum_{h=t+0}^{w} {}^{h+1}/\boldsymbol{\ddot{a}}_{\boldsymbol{x}} = t \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} + 1 \cdot \frac{S_{x+t+1}}{D_{x+t}}$$

y

$$\boldsymbol{\ddot{a}}_{\boldsymbol{x+t}} = \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

3 En este caso la duración sería el cociente de dos rentas pospagables, la del nominador de términos variables en progresión aritmética y el denominador constante:

$$DE = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{Va}(t+1;1)_{\boldsymbol{x}}}{{}^{t}/\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{x}}} = \frac{(t+1) \cdot \frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t}} + 1 \cdot \frac{S_{x+t+2}}{D_{x+t}}}{\frac{N_{x+t+1}}{D_{x+t}}}$$

alcanzando la expresión indicada.

diferida de términos variables en progresión aritmética entre la misma renta pero de términos constantes:

$$DE = \frac{t \cdot {}_t p_x \cdot v^t + (t+1) \cdot {}_{t+1} p_x \cdot v^{t+1} + \ldots + (t+n) \cdot {}_{t+n} p_x \cdot v^{t+n}}{L(i)_0} = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{V\ddot{a}}(t;1)_{\overline{xn|}}}{{}^{t}/\boldsymbol{\ddot{a}}_{\overline{xn|}}}$$

En símbolos[4] tras la simplificación correspondiente resulta,

$$DE = t + \frac{S_{x+t+1} - S_{x+t+n-1} - (n-2) \cdot N_{x+t+n-1}}{N_{x+t} - N_{x+t+n}}$$

Para abono de pagos al final de cada periodo su Duración Esperada viene determinada[5] como,

$$DE = t + 1 + \frac{S_{x+t+2} - S_{x+t+n-2} - (n-2) \cdot N_{x+t+n-2}}{N_{x+t+1} - N_{x+t+n+1}}$$

4 Inicialmente en símbolos de conmutación sería:

$$DE = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{V\ddot{a}}(t;1)_{\overline{xn|}}}{{}^{t}/\boldsymbol{\ddot{a}}_{\overline{xn|}}} = \frac{t \cdot \dfrac{N_{x+t} - N_{x+t+n}}{D_{x+t}} + 1 \cdot \dfrac{S_{x+t+1} - S_{x+t+n-1} - (n-2) \cdot N_{x+t+n-1}}{D_{x+t}}}{\dfrac{N_{x+t} - N_{x+t+n}}{D_{x+t}}}$$

Simplificando alcanzamos la expresión apuntada.

5 El cociente de una renta diferida temporal pospagable de términos variables en progresión aritmética sobre una renta de las mismas características pero constante:

$$DE = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{Va}(t+1;1)_{\overline{xn|}}}{{}^{t}/\boldsymbol{a}_{\overline{xn|}}} = \frac{(t+1) \cdot \dfrac{N_{x+t+1} - N_{x+t+n+1}}{D_{x+t}} + 1 \cdot \dfrac{S_{x+t+2} - S_{x+t+n-2} - (n-2) \cdot N_{x+t+n-2}}{D_{x+t}}}{\dfrac{N_{x+t+1} - N_{x+t+n+1}}{D_{x+t}}}$$

7. INDEMNIZACIONES

Es común la existencia de productos actuariales comercializados tanto a través de compañías aseguradoras como integradas en distintos planes de previsión que contemplen prestaciones a otorgar en forma de cuantía única y al ocurrir un determinado evento (fallecimiento, invalidez, etc.). En este caso, la prestación consiste en un único pago a tanto alzado. Son operaciones que suministran esa cantidad determinada en el momento en el que ocurre el hecho causante de la prestación, es decir, la indemnización.

Trataremos en este epígrafe el valor de las indemnizaciones más comunes y simples, sin centrarnos en el análisis y desarrollo del valor de cada una de ellas, pues sería objeto de la matemática actuarial. Trataremos sus valores y su equivalente en símbolos de conmutación con el fin de determinar una expresión simplificada de la Duración Esperada.

Hay que tener en cuenta que el abono del capital o cuantía a tanto alzado se encuentra supeditada al momento en el que ocurre el hecho causante, que por término medio consideraremos que ocurrirá a mitad de año (distribución uniforme de las salidas del colectivo).

7.1. Seguro a vida entera

7.1.1. Definición

En este tipo de seguro se abona un capital estipulado inicialmente al ocurrir el fallecimiento al asegurado, sin limitación temporal de la existencia del mismo. El fallecimiento del asegurado se estima que ocurre a mitad de año bajo la hipótesis común en la ciencia actuarial de la distribución uniforme de salidas, por lo que consideramos que los pagos al fallecimiento se realizarán por término medio a mediados de año.

7.1.2. Duración Esperada

Determinamos la Duración Esperada ante una variación del tipo de interés a través de la expresión general y para una estructura de interés plana:

$$DE = \frac{\sum_{h=1}^{s} (h) \cdot L_h \cdot (1+i)^{-h}}{L(i)_0}$$

en nuestro caso,

$$DE = \frac{1 \cdot {}_0p_x \cdot q_x \cdot v^{0,5} + 2 \cdot {}_1p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^{1+0,5} + 3 \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot v^{2+0,5} \ldots}{L(i)_0}$$

El numerador tiene un plazo vitalicio (hasta el fallecimiento del asegurado) y es variable en progresión aritmética de razón la unidad, luego nos define una indemnización muy común en la matemática actuarial: la indemnización *increasing*. Por lo tanto podemos poner,

$$DE = \frac{\sum_{h=0}^{w} (h+1) \cdot {}_hp_x \cdot q_{x+h} \cdot v^{h+0,5}}{L(i)_0} = \frac{\boldsymbol{(IA)}_x}{\boldsymbol{A}_x}$$

Y en símbolos de conmutación,

$$DE = \frac{R_x}{M_x}$$

7.2. Seguro temporal

7.2.1. Definición

Se caracteriza por el abono de un capital estipulado en un contrato de seguro al fallecimiento del asegurado, siempre que dicho fallecimiento ocurra con anterioridad a una fecha determinada. Su desarrollo es prácticamente idéntico al seguro a vida entera si bien éste está acotado superiormente. Esto es, la prestación consiste en el abono de un capital de una unidad monetaria en el momento en el que ocurra el hecho causante y en un plano máximo de *n* años.

7.2.2. Duración Esperada

A través de la formulación general en la que se ponderan temporalmente en el numerador los pagos probables actualizados, tenemos:

$$DE = \frac{1 \cdot {}_0p_x \cdot q_x \cdot v^{0,5} + 2 \cdot {}_1p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^{1+0,5} + 3 \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} \cdot v^{2+0,5} \ldots + n \cdot {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot v^{n-1+0,5}}{L(i)_0}$$

Esto es,

$$DE = \frac{\sum_{h=0}^{n-1} (h+1) \cdot {}_hp_x \cdot q_{x+h} \cdot v^{h+0,5}}{L(i)_0} = \frac{(IA)^{\,1}_{x:\overline{n|}}}{A^{\,1}_{x:\overline{n|}}}$$

Y en símbolos de conmutación,

$$DE = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{M_x - M_{x+n}}$$

7.3. Seguro diferido

7.3.1. Definición

En este caso la cobertura del seguro de vida entera o temporal no es inmediata, sino que comenzará a darse dentro de *t* periodos siempre que el asegurado se encuentre vivo. Existe por lo tanto, un periodo de carencia en el que el asegurado no puede ser acreedor de la prestación, aunque ocurra el hecho causante de ésta. Posteriormente tras pasar esos *t* periodos el asegurado podrá devengar la prestación en el momento en el que ocurra la contingencia.

7.3.2. Duración Esperada

A través de la expresión general en la que se ponderan temporalmente en el numerador los compromisos probables de pago actualizados, tenemos las siguientes expresiones.

7.3.2.1.A vida entera

El numerador define una indemnización diferida de términos variables en progresión aritmética, cuyo primer término sería *t* y la razón de incrementos es la unidad[6]:

$$DE = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{VA}(t,1)\,{}^{1}_{x}}{{}^{t}/\boldsymbol{A}^{1}_{x}}$$

En símbolos de conmutación resultaría:

$$DE = t + \frac{R_{x+t+1}}{M_{x+t}}$$

7.3.2.2.Temporal

El numerador de la Duración Esperada define una renta de términos variables en progresión aritmética, al igual que en el seguro a vida entera, pero en este caso la prestación se abona si la contingencia ocurre en una temporalidad de *n* periodos[7].

---

6 Si el término es diferente a la unidad, queda en función de una indemnización constante y una indemnización *increasing*:

$$\boldsymbol{VA}(C_1;\pi)_x = C_1 \cdot \boldsymbol{A}_x + \pi \cdot 1/\boldsymbol{(IA)}_x = C_1 \cdot \frac{M_x}{D_x} + \pi \cdot \frac{R_{x+1}}{D_x}$$

7 El valor de una indemnización de términos variables en progresión aritmética en función de indemnizaciones más simples:

$$DE = \frac{{}^{t}/\boldsymbol{VA}(t,1)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}}{{}^{t}/\boldsymbol{A}_{\overset{1}{x:\overline{n|}}}}$$

en símbolos de conmutación resulta,

$$DE = t + \frac{R_{x+t+1} - R_{x+t+n} - (n-1)\cdot M_{x+t+n}}{M_{x+t} - M_{x+t+n}}$$

8. SEGURO MIXTO

Los seguros anteriores son normalmente parte de otro seguro o entran a formar parte de una cobertura más completa. De hecho si se abona un capital en forma de capital único dentro de unos años o en forma periódica (renta) mientras vive el asegurado, es aconsejable al menos para los primeros años también tener contratado un seguro para caso de muerte.

Por tanto la realidad va a estar formada de una combinación de las operaciones actuariales más simples con el fin de obtener una cobertura de protección satisfactoria y más completa.

8.1. Definición

El seguro mixto se caracteriza por la combinación de un seguro temporal y de un capital diferido. De esta forma se abona un capital al fallecimiento del asegurado siempre que el deceso ocurra con anterioridad a una edad determinada y en el caso de que alcance vivo

---

$$\boldsymbol{VA}(C_1;\pi)_{\overset{1}{x:\overline{n|}}} = C_1 \cdot \boldsymbol{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + \pi \cdot 1/\boldsymbol{(IA)}_{\overset{1}{x:\overline{n-1|}}} =$$

$$= C_1 \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \pi \cdot \frac{R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1)\cdot M_{x+n}}{D_x}$$

dicha edad, recibirá en ese momento el capital estipulado inicialmente. Esto es, será cierto que se abonará el capital en la operación, sin embargo se desconoce si será debido al fallecimiento del asegurado o por alcanzar vivo una determinada edad.

8.2. Duración Esperada

Ponderando los flujos probables de pago con la temporalidad,

$$DE = \frac{1 \cdot {}_{0}p_x \cdot q_x \cdot v^{0,5} + 2 \cdot {}_{1}p_x \cdot q_{x+1} \cdot v^{1+0,5} + \ldots + n \cdot \left({}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot v^{n-1+0,5} + v^n \cdot {}_{n}p_x \right)}{L(i)_0}$$

En el numerador del cálculo de la Duración Esperada podemos apreciar los *n* primeros términos que nos definen una indemnización *increasing* y un último término que nos indica un capital diferido de cuantía *n* o el momento del pago. Concretamente

$$DE = \frac{(IA)^{1}_{x:\overline{n|}} + n \cdot {}_{n}E_x}{A^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_{n}E_x}$$

Y en símbolos de conmutación los cuales nos permiten un cálculo rápido y sencillo de este plazo medio de pago,

$$DE = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot \left(M_{x+n} - D_{x+n} \right)}{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}$$

9. ANÁLISIS PRÁCTICO

Con el fin de ilustrar el empleo de la Duración Esperada así como su utilidad proponemos unos casos prácticos dependiendo del producto básico de seguro, donde podremos apreciar la aproximación del valor actuarial de las obligaciones ante variaciones instantáneas del tipo de interés para una estructura plana, así como el error cometido por el empleo de la Duración Esperada. En todos los casos que se presentan a continuación se han empleado las siguientes hipótesis técnicas:

9.1.Hipótesis técnicas

- Se ha escogido un asegurado varón sobre el que se emplean las tablas de mortalidad general GR-95 masculinas.
- El tipo de interés técnico con el que se comercializa el producto actuarial correspondiente del 3,5% anual.
- Se considera una operación actuarial neta, esto es, libre de gastos abonada a través de una prima única.
- Las prestaciones que se van a otorgar son constantes.
- Las variaciones del tipo de interés estudiadas serán medidas en puntos básicos, siendo las analizadas de 1, 10 y 25 puntos básicos, tanto al alza como a la baja. Esto es, variaciones desde el 3,25% al 3,75%.

9.2.Capital diferido

Un asegurado de 40 años tiene contratado este producto a recibir 10.000 € en un plazo de 10 años, con lo que la provisión matemática correspondiente sería:

$$L(3,5\%)_0 = 10.000 \cdot {}_{10}E_{40} = 10.000 \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}} = 8.329,43 \text{ €}$$

Su duración esperada, al sólo existir un único pago dentro de 10 años, sería precisamente esos 10 años:

$$DE = \frac{10 \cdot {}_{10}E_{40}}{{}_{10}E_{40}} = 10$$

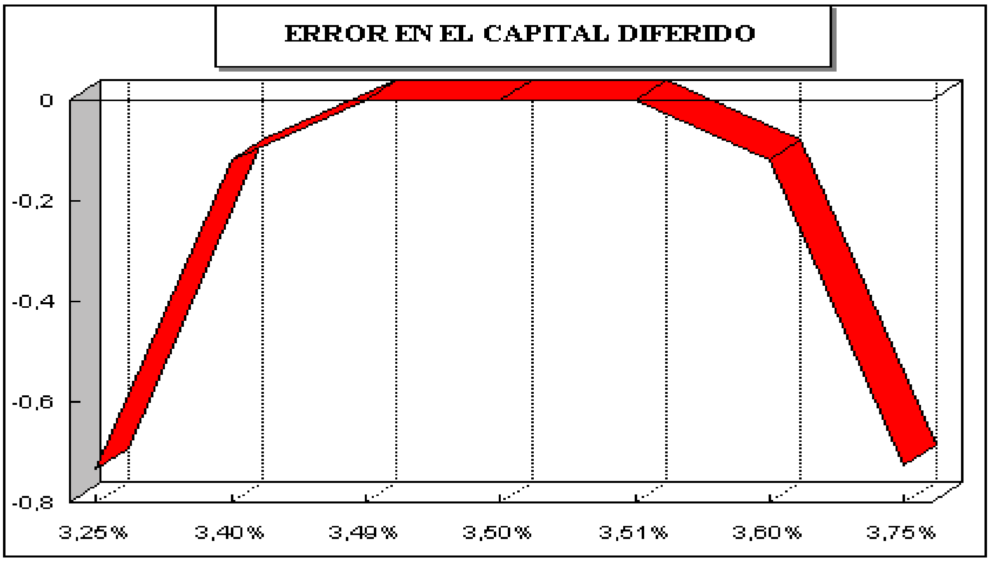
Ante una variación instantánea del tipo de interés el nuevo valor actuarial estimado a través de la duración esperada lo obtendríamos a través de la expresión,

$$L(3{,}5\% + e)_0 = L(3{,}5\%)_0 \cdot \left(1 - DE \cdot \frac{e}{1 + 3{,}5\%}\right)$$

donde obtenemos los siguientes resultados:

i	*Real*	*Aproximado*	*Diferencia*	%
3,25%	8.430,77	8.430,03	(0,7331)	-0,00870%
3,40%	8.369,79	8.369,67	(0,1169)	-0,00140%
3,49%	8.333,46	8.333,46	(0,0012)	-0,00001%
3,50%	**8.329,43**	**8.329,43**	**0,0000**	**0,00000%**
3,51%	8.325,41	8.325,41	(0,0012)	-0,00001%
3,60%	8.289,31	8.289,20	(0,1164)	-0,00140%
3,75%	8.229,56	8.228,84	(0,7249)	-0,00881%

Gráficamente,



Se puede apreciar que ante pequeños movimientos del tipo de interés el error cometido por el empleo de la Duración Esperada nos da unos resultados francamente aceptables.

9.3.Rentas periódicas

Para el caso de las rentas periódicas analizamos tanto las rentas vitalicias como las temporales para unos asegurados que actualmente tienen 65 años con abono de prestaciones anuales prepagables de 10.000 € al año. El valor de las provisiones matemáticas constituidas en cada caso serán, para la renta vitalicia:

$$L(3{,}5\%)_0 = 10.000 \cdot \ddot{a}_{65} = 142.453{,}82 \text{ €}$$

Y para la renta temporal,

$$L(3{,}5\%)_0 = 10.000 \cdot \ddot{a}_{65:\overline{10|}} = 80.253{,}71 \text{ €}$$

La Duración Esperada en cada caso asciende para la renta vitalicia

$$DE = \frac{(Ia)_{65}}{\ddot{a}_{65}}$$

En símbolos de conmutación al tanto de interés constante *3,5%*, sería:

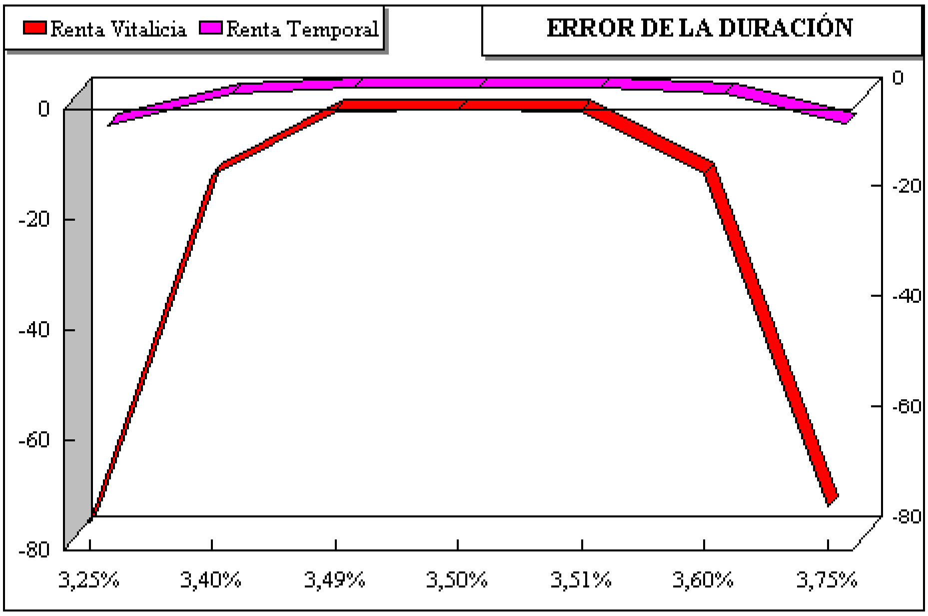
$$DE = \frac{S_{66}}{N_{65}} = 9{,}96 \text{ años}$$

Y para la renta temporal, tendremos una Duración Esperada de:

$$DE = \frac{(Ia)_{65:\overline{9|}}}{\ddot{a}_{65:\overline{10|}}} = \frac{S_{66} - S_{75} - 9 \cdot N_{75}}{N_{65} - N_{75}} = 4{,}06 \text{ años}$$

Ante unas variaciones del tipo de interés como se ha apuntado, se obtendrán los siguientes resultados

	Vitalicia				***Temporal***			
I	*Real*	*Aproximado*	*Diferencia*	*%*	*Real*	*Aproximado*	*Diferencia*	*%*
3,25%	145.955,27	145.880,33	(74,9367)	-0,05134%	81.048,24	81.041,48	(6,7604)	-0,00834%
3,40%	143.836,28	143.824,42	(11,8557)	-0,00824%	80.569,89	80.568,81	(1,0771)	-0,00134%
3,49%	142.591,00	142.590,88	(0,1178)	-0,00008%	80.285,23	80.285,22	(0,0107)	-0,00001%
3,50%	**142.453,82**	**142.453,82**	**0,0000**	**0,00000%**	**80.253,71**	**80.253,71**	**0,0000**	**0,00000%**
3,51%	142.316,87	142.316,76	(0,1176)	-0,00008%	80.222,21	80.222,20	(0,0107)	-0,00001%
3,60%	141.094,89	141.083,21	(11,6808)	-0,00828%	79.939,67	79.938,60	(1,0710)	-0,00134%
3,75%	139.099,50	139.027,30	(72,2042)	-0,05191%	79.472,60	79.465,93	(6,6654)	-0,00839%



Se puede apreciar tanto numérica como gráficamente que los valores aproximados tanto en la renta vitalicia como en la temporal son realmente cercanos al verdadero valor, bajo la premisa que hemos apuntado de pequeñas variaciones en el tipo de interés. No hay que olvidar que la Duración Esperada es una aproximación lineal al verdadero valor, con lo que a movimientos más grandes de los tipos de interés se producen unas desviaciones mayores. Igualmente se puede apreciar que el mayor plazo de la renta vitalicia va a conllevar mayores errores que la renta temporal.

9.4.Indemnizaciones

Para el caso de las indemnizaciones analizamos tanto un seguro a vida entera, como temporal o mixto para un asegurado de 35 años y según el caso hasta la edad normal de jubilación (65 años) por un importe de 60.000 €. El valor de las provisiones matemáticas constituidas en cada caso serán, para el seguro a vida entera:

$$L(3{,}5\%)_0 = 60.000 \cdot \boldsymbol{A}_{35} = 14.082{,}67 \text{ €}$$

para el seguro temporal,

$$L(3{,}5\%)_0 = 60.000 \cdot \boldsymbol{A}_{\substack{1\\35:\overline{30|}}} = 4.408{,}90 \text{ €}$$

y para el seguro mixto:

$$L(3{,}5\%)_0 = 60.000 \cdot \left(\boldsymbol{A}_{\substack{1\\35:\overline{30|}}} + {}_{30}E_{35} \right) = 22.756{,}01 \text{ €}$$

Asimismo, la Duración Esperada en cada caso asciende para el seguro a vida entera

$$DE = \frac{\boldsymbol{(IA)}_{35}}{\boldsymbol{A}_{35}} = \frac{R_{35}}{M_{35}} = 38{,}27 \text{ años}$$

para el seguro temporal,

$$DE = \frac{\boldsymbol{(IA)}_{\substack{1\\35:\overline{30|}}}}{\boldsymbol{A}_{\substack{1\\35:\overline{30|}}}} = \frac{R_{35} - R_{65} - 30 \cdot M_{65}}{M_{35} - M_{65}} = 18{,}45 \text{ años}$$

y para el seguro mixto:

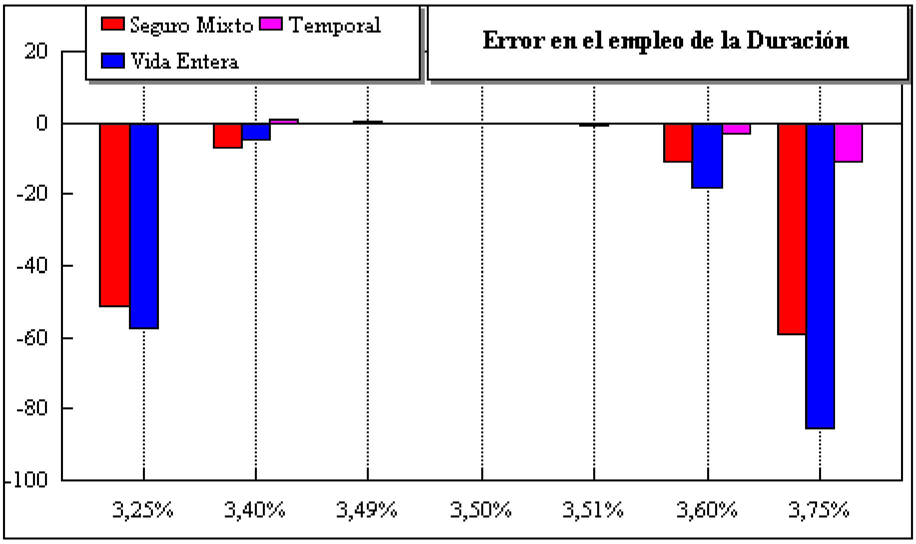
$$DE = \frac{(IA)^{\;1}_{35:\overline{30|}} + 30 \cdot {}_{30}E_{35}}{A^{\;1}_{35:\overline{30|}} + {}_{30}E_{35}} = \frac{R_{35} - R_{65} - 30 \cdot (M_{65} - D_{65})}{M_{35} - M_{65} + D_{65}} = 27{,}76 \text{ años}$$

Ante unas variaciones del tipo de interés como se ha apuntado, se obtendrán los siguientes resultados

	Vida Entera				***Temporal***			
I	*Real*	*Aproximado*	*Diferencia*	*%*	*Real*	*Aproximado*	*Diferencia*	*%*
3,25%	15.441,65	15.384,38	(57,2729)	-0,37090%	4.605,41	4.605,35	(0,0593)	-0,00129%
3,40%	14.608,14	14.603,35	(4,7872)	-0,03277%	4.486,20	4.487,48	1,2791	0,02851%
3,49%	14.134,17	14.134,74	0,5661	0,00401%	4.416,55	4.416,76	0,2045	0,00463%
3,50%	**14.082,67**	**14.082,67**	**0**	**0**	**4.408,90**	**4.408,90**	**0**	**0**
3,51%	14.031,40	14.030,60	(0,7941)	-0,00566%	4.401,26	4.401,04	(0,2214)	-0,00503%
3,60%	13.580,00	13.561,99	(18,0189)	-0,13269%	4.333,29	4.330,32	(2,9667)	-0,06846%
3,75%	12.866,39	12.780,96	(85,4290)	-0,66397%	4.222,94	4.212,45	(10,4912)	-0,24843%

	Seguro Mixto			
I	*Real*	*Aproximado*	*Diferencia*	*%*
3,25%	24.333,11	24.281,96	(51,1438)	-0,21018%
3,40%	23.373,16	23.366,39	(6,7678)	-0,02896%
3,49%	22.816,92	22.817,05	0,1248	0,00055%
3,50%	**22.756,01**	**22.756,01**	**0**	**0**
3,51%	22.695,27	22.694,97	(0,3010)	-0,00133%
3,60%	22.156,48	22.145,63	(10,8495)	-0,04897%
3,75%	21.289,07	21.230,06	(59,0099)	-0,27718%

Gráficamente se pueden también apreciar los errores absolutos respecto al verdadero valor:



El error positivo detectado en la indemnización sin duda corresponde a la asunción de la salida a mitad de año. Por otra parte podemos apreciar que los menores errores se producen en la indemnización temporal la cual tiene un plazo limitado, mientras que el seguro mixto al considerar un pago probable a los 65 años en caso de vida produce una desviación al estar más alejado en el tiempo. Las mayores desviaciones las podemos contemplar en el seguro a vida entera.

No obstante para estas variaciones del tipo de interés se puede apreciar que el empleo de la Duración Esperada nos proporciona unos valores realmente cercanos.

10. BIBLIOGRAFÍA

Bierwag, George O. (1977) Inmunization, Duration and the Structure of Interes Rate. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, diciembre, Washington.

Bierwag, George O. (1991) *Análisis de la duración. La gestión del riesgo de tipo de interés.* Ed. Alianza Economía y Finanzas. Madrid.

Bierwag G.O.; Kaufman George G. and Khang Chulsoon (1978) Duration and Bond Portfolio Analysis; an Overview . *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, noviembre, Washington.

Bierwag G. O.; Charles J. Corrado And George G. Kaufman (1990) Computing durations for bond portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, Fall, New York.

De La Peña, J. Iñaki, (1997) El riesgo de interés en seguros y pensiones: una aproximación actuarial. Primer Premio exaequo 10º Colloquiumm Internacional de Barcelona. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles,* 3ª época, Nº 2, pp. 49-172. Madrid.

De La Peña, J. Iñaki, (2000*). Planes de Previsión Social.* Ed. Pirámide. Madrid.

De La Peña, J. Iñaki, (2001*).*Alternativa al Payback en la selección de proyectos de inversión: La duración. *Análisis Financiero* Nº 83, primer cuatrimestre 2001. Madrid.

Fabozzi, Frank J. (1995). *Valuation of Fixed Income Securities and Derivatives.* Ed. Frank J. Fabozzi Associates. New Hope.

Hicks, J.R. (1939) .*Value and Capital*. Oxford: Claredon Press.

Leibowitz, Martin L. (1986 a) The Dedicated Bond Portfolio in Pension Funds, Part I: Motivations and Basics. *The Financial Analysts Journal* de Enero-Febrero, Virginia.

Leibowitz, Martin L. (1986 b) The Dedicated Bond Portfolio in Pension Funds, Part II: Inmunization, Horizon Matching and Contingent Procedures. *The Financial Analysts Journal* de Marzo-Abril, Virginia.

Li, David X. & Panjer, Harry H. (1994). Immunization Measures for Life Contingences. *The Procedings of the fourth AFIR International Colloquium*, Orlando.

Macaulay, F. (1938) The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stocks Prices in United States since 1.856. *National Bureau of Economic Research*, New York.

Redington, F.M. (1952) Review of the Principles of Life-Office Valuation. *The Journal of the Institute of Actuaries*, 18, London.

Toevs, Alden L. (1986). *Uses of Duration Analysis for the Control of Interest Rate Risk.* Publicado en el libro de Platt, R.B. *Controlling Interest Rate Risk*, John Willey & Sons, Inc., New York.