ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE LA RENTABILIDAD DE LA INVERSIÓN EN OBLIGACIONES CLÁSICAS

Rafael Moreno Ruiz[1], Vicente T. González Catalá[2], Olga Gómez Pérez-Cacho[1] y Eduardo Trigo Martínez[1]

RESUMEN

En este trabajo se analiza la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones clásicas cuya vida es aleatoria por ser amortizadas por sorteo, planteando su determinación en el momento de la emisión y suponiendo que se trata de suscriptores que van a mantener los valores hasta su amortización.

La parte principal del trabajo consiste en el análisis de la rentabilidad efectiva de la inversión de un obligacionista mediante una metodología estocástica, coherente con la naturaleza aleatoria de dicha variable, y su aplicación en distintos ejemplos prácticos.

Así mismo, se intenta determinar cuál es la relación entre dicha variable aleatoria –sus momentos- y el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas, así como el valor informativo de esta variable cierta en el contexto de aquel análisis estocástico.

PALABRAS CLAVE

Empréstitos clásicos de obligaciones; rentabilidad del suscriptor; tantos efectivos; análisis estocástico.

---

[1] Departamento de Finanzas y Contabilidad de la Universidad de Málaga.
[2] Departamento de Ciencias Empresariales de la Universidad de Alcalá de Henares.

1. INTRODUCCIÓN.

Se utiliza la denominación de empréstitos clásicos de obligaciones para hacer referencia a aquellos empréstitos en los que las cuantías de los capitales que componen la contraprestación de la operación quedan determinadas en el momento de la emisión, pudiendo tratarse de magnitudes constantes o variables (en cuyo caso, sus valores se preestablecen en la emisión).

Frente a ellos se pueden agrupar todas las modalidades de empréstitos en los que la cuantía de algún capital integrante de la contraprestación depende del valor de cierta variable externa a la propia operación financiera (caso de los empréstitos indizados, incluidos los partícipes en beneficios y los convertibles en acciones).

Asimismo, también se puede distinguir entre empréstitos en los que, a lo largo de su vida o duración total, la amortización de las obligaciones se realiza por sorteo, de forma que la vida de cada uno de los títulos emitidos es una variable aleatoria; y, por otra parte, empréstitos en los que la vida de las obligaciones es una variable cierta o determinista, ya sea porque se trata de obligaciones perpetuas, que nunca se amortizan, o de obligaciones con momento cierto de amortización (denominadas también obligaciones con amortización única).

En este trabajo se analiza la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones clásicas cuya vida es aleatoria por ser amortizadas por sorteo, y desde la perspectiva de un inversor que las adquiere en el momento de la emisión y las mantiene hasta su amortización.

Como es sabido, la rentabilidad efectiva de una operación financiera viene dada por el tanto medio efectivo activo o del prestamista.

Que dicho tanto sea medio significa que se trata de un promedio por período y para toda la duración de la inversión; y que sea efectivo, que recoge el conjunto de rendimientos netos que produce la inversión financiera. No obstante, en lo que sigue hablaremos del tanto efectivo activo, sin mencionar expresamente su carácter de promedio referido a toda la duración de la inversión, el cual se da por conocido.

Así, a efectos de determinar la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones, consideraremos la contraprestación que efectivamente percibe el inversor, la cual no sólo consta del nominal de cada obligación y los intereses devengados por la misma, sino también de otros elementos, denominados habitualmente características complementarias.

Sin embargo, para evitar la complejidad que ello conllevaría –además, en aspectos ajenos al objetivo metodológico de este trabajo-, no tenemos en cuenta la fiscalidad derivada de la operación, la cual puede considerarse una característica complementaria más y que, en el caso del inversor en obligaciones, consistiría en los pagos por el impuesto directo que grave los rendimientos netos de la inversión (reduciendo, por tanto, su rentabilidad efectiva).

Así mismo, también queda fuera del alcance de este trabajo la inclusión del efecto de la inflación, que obligaría a que la rentabilidad efectiva se obtuviese en términos reales y no monetarios o nominales.

La metodología de análisis que se aplica en este trabajo es estocástica, de forma que no se simplifica la realidad de la variable objeto de estudio –que es aleatoria- mediante el uso exclusivo de valores medios en sustitución de las distribuciones de probabilidad intervinientes.

2. LOS EMPRÉSTITOS CLÁSICOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS OBLIGACIONISTAS.

2.1. Características financieras puras o básicas.

En primer lugar, las obligaciones pueden constituir préstamos americanos –empréstitos con pago periódico de intereses, supondremos que pospagables o vencidos- o préstamos simples o elementales (empréstitos con pago acumulado de intereses o cupón cero).

En lo que se refiere a la duración total del empréstito, supondremos que se trata de emisiones no perpetuas, es decir, que tienen una vida total de n años, al cabo de los cuales estarán amortizados la totalidad de los títulos emitidos.

El tipo de interés de la operación, al que se abonan cupones periódicos o se acumulan intereses hasta el momento de la amortización, puede ser bien constante (i) o bien variable (i_s, $s = 1, 2, ..., n$) pero con valores preestablecidos en el momento de la emisión.

En cuanto al número de títulos que se amortizan en cada sorteo −que supondremos que se celebra al final del año correspondiente-, también puede ser constante (M) o variable (M_s, $s = 1, 2, ..., n$); pero, en cualquier caso, situándonos en el momento de la emisión, todas las obligaciones emitidas tienen la misma probabilidad de resultar amortizadas en uno cualquiera de los sorteos periódicos (y, por tanto, la misma vida media esperada).

2.2. Características complementarias que afectan a los obligacionistas.

En este epígrafe vamos a hacer una breve referencia a las características complementarias más comunes que afectan a los obligacionistas, comentando el efecto que tienen sobre la rentabilidad efectiva de su inversión financiera.

Al no considerar el efecto de la fiscalidad derivada de la operación, todas las características complementarias que se plantean son bilaterales.

- **Prima de emisión.**

Supondremos que la prima de emisión (P_e) es la misma para todos los suscriptores −es decir, que la suscripción no se produce mediante subasta-, de forma que el precio de emisión o suscripción es $V = C - P_e$.

Cuanto mayor sea la prima de emisión, lógicamente, mayor será la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones, pues menor será la prestación a desembolsar por cada una, sin que por ello varíe la contraprestación que se recibirá a cambio.

– **Prima de amortización.**

La prima de amortización o reembolso, constante (P) o variable (P_s, $s = 1, 2, ..., n$), es la cantidad que se agrega al nominal –en los empréstitos con cupón periódico-, o a la suma del nominal más los intereses acumulados hasta la fecha de amortización –en los empréstitos cupón cero, aunque en ellos es menos habitual su existencia-, para determinar el valor de reembolso del título.

Incrementa el valor de la contraprestación que el prestatario satisface a cada título, por lo que, cuanto mayor sea su importe, mayor será también la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones.

– **Lote.**

Es la cantidad constante (L) o variable (L_s, $s = 1, 2, ..., n$) que se reparte entre un cierto número de títulos obtenidos al azar entre los amortizados en cada sorteo (h_s, $s = 1, 2, ..., n$). Por tanto, tiene el mismo efecto que la prima de amortización.

– **Fraccionamiento en el vencimiento –pago- de intereses.**

Esta característica complementaria, que también incrementa el valor de la contraprestación que el inversor recibe por cada título, sólo tiene sentido en los empréstitos con pago periódico de intereses pospagables.

Consiste en que, en lugar del cupón anual ($C \cdot i_s$), el prestatario abona m pagos por intereses en cada año, uno al final de cada m-ésimo del año y todos de la misma cuantía: $C \cdot i_s^{(m)}$.

Siendo $i_s^{(m)}$ el tanto asociado al m-ésimo de año (en el año s-ésimo), que guarda la siguiente relación con el correspondiente tanto anual i_s:

$$\left(1+i_s^{(m)}\right)^m = \left(1+i_s\right)$$

Por no ser tan habitual como las ya mencionadas, y por razones de simplificación en las expresiones a manejar, no tendremos en cuenta otra característica complementaria como es la amortización seca o ex-cupón, la cual, a diferencia del resto de características bilaterales, disminuye el valor de la contraprestación que el prestatario satisface a cada título –mermando, por tanto, la rentabilidad efectiva de la inversión-, pues consiste en que los títulos que resultan amortizados pierden los intereses de ese último año.

En conclusión, los términos amortizativos anuales, constantes o variables, que el emisor satisface al conjunto de los obligacionistas –las denominadas anualidades activas con características complementarias- tienen, con carácter general, la siguiente estructura, dependiendo de que se trate de un empréstito con cupón vencido o de uno cupón cero:

$$a_s = \begin{cases} \text{Cupón vencido:} \quad C \cdot i_s \cdot N_s + \left(C + P_s\right) \cdot M_s + L_s \\ \\ \text{Cupón cero:} \quad \left[C \cdot \prod_{h=1}^{s} (1+i_h) + P_s\right] \cdot M_s + L_s \end{cases}$$

Si, en el caso del empréstito con cupón vencido, existiese fraccionamiento en el pago de intereses, la anualidad anterior sería igual a la suma financiera –valorada al final del año- de los m-1 pagos de intereses fraccionados y un m-ésimo pago que incluiría tanto los correspondientes intereses fraccionados como el resto de elementos de la contraprestación de vencimiento en el año.

2.3. Tantos efectivos de los obligacionistas.

La primera medida que podemos obtener de la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones es el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas (considerados globalmente como si fuesen un único suscriptor). Se trata del tanto anual i_a para el cual se satisface la siguiente equivalencia financiera:

Prestación efectiva que desembolsan el conjunto de obligacionistas	$\overset{i_a}{\longleftrightarrow}$	Contraprestación efectiva que obtienen el conjunto de obligacionistas

Suponiendo los términos amortizativos anuales que hemos expuesto en el epígrafe anterior (a_s), la ecuación de equivalencia financiera que permite obtener el tanto efectivo activo i_a , válida con carácter general –ya se trate de un empréstito con cupón vencido o de uno cupón cero-, es la siguiente:

$$V \cdot N_1 = \sum_{s=1}^{n} a_s \cdot (1 + i_a)^{-s} \rightarrow i_a$$

Siendo N_1 el número de títulos emitidos (y suscritos, se supone).

Al ser la duración total del empréstito (n) una variable cierta (así como V, N_1 y a_s, s = 1, 2, ..., n), el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas también lo es, y representa la rentabilidad cierta que obtendría un inversor que suscribiese todo el empréstito.

Sin embargo, puesto que no parece lógico pensar que un mismo inversor pueda adquirir la totalidad del empréstito –salvo que se trate de inversores institucionales-, también se hace necesario medir la rentabilidad efectiva de la inversión en obligaciones que obtiene un inversor que suscribe un paquete o cartera de títulos (de la misma emisión). Se trata del tanto anual i_e para el cual se satisface la siguiente equivalencia financiera:

Prestación efectiva que desembolsa el obligacionista	$\overset{i_e}{\longleftrightarrow}$	Contraprestación efectiva que obtiene el obligacionista

Donde el valor de la prestación efectiva es una variable cierta y el de la contraprestación efectiva una variable aleatoria, al serlo la duración o vida de la inversión y, también, ser incierta la percepción, por cada título, cuando resulte amortizado, de un elemento de la contraprestación que es el lote.

Por consiguiente, la rentabilidad efectiva de la inversión en un paquete o cartera de obligaciones (i_e) es una variable aleatoria, a cuya distribución de probabilidad vamos a aproximarnos, en el epígrafe siguiente, por medio del estudio de la distribución de la variante "rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación".

Asimismo, y de forma complementaria, trataremos de determinar, conforme a criterios lógicos, cuál ha de ser la relación entre los momentos de dicha variable aleatoria y el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas, lo que permitirá establecer el papel que puede asignarse a esta variable cierta cuando se analice la rentabilidad efectiva de la inversión de un obligacionista, según cuáles sean las características financieras puras y complementarias de la emisión.

3. ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE LA RENTABILIDAD DE LA INVERSIÓN DE UN OBLIGACIONISTA.

Supongamos un inversor que suscribe un único título. En primer lugar definimos la variable aleatoria "vida de una obligación" –la misma para cada una de las N_1 obligaciones emitidas-, que representamos por η, y cuya distribución de probabilidad, de tipo discreto, es la siguiente:

$\eta = s$	$P(\eta = s) = q_s$
1	$q_1 = \dfrac{M_1}{N_1}$
2	$q_2 = \dfrac{M_2}{N_1}$
...	...
n	$q_n = \dfrac{M_n}{N_1}$

Siendo q_s la probabilidad de que una cualquiera de las obligaciones emitidas resulte amortizada en el sorteo (año) s-ésimo (M_s, como ya se ha dicho más arriba, es el número de títulos que se amortizarán en dicho sorteo).

Por otra parte, caso de que en las condiciones de la emisión se prevea el pago de un lote a repartir entre un cierto número de obligaciones de entre las que se amortizan en cada sorteo, la percepción o no de lote por una obligación que resulte amortizada en el sorteo s-ésimo es un fenómeno aleatorio dicotómico que puede ser representado por la variable aleatoria binomial Λ_s:

$$\Lambda_s = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \text{ si se percibe lote;} & P(\Lambda_s = 1) = l_1^s = \dfrac{h_s}{M_s} \\ \\ 0 \text{ si no se percibe lote;} & P(\Lambda_s = 0) = l_0^s = 1 - l_1^s \end{array} \right\}, \quad s = 1, 2, ..., n$$

Siendo h_s el número de títulos que percibirán lote en el sorteo s-ésimo, obtenidos al azar entre los amortizados en el mismo.

l_1^s y l_0^s son probabilidades condicionadas, pues los sucesos a los que están asociadas sólo pueden acaecer si la obligación resulta amortizada en el sorteo s-ésimo (y no en otro distinto).

Por tanto, la probabilidad total de que un título resulte amortizado en dicho sorteo s-ésimo y perciba lote, que representaremos por $q_{s,1}$, es:

$$q_{s,1} = q_s \cdot l_1^s = \frac{M_s}{N_1} \cdot \frac{h_s}{M_s} = \frac{h_s}{N_1}$$

Y, de la misma forma, la probabilidad total de que un título resulte amortizado en el sorteo s-ésimo y no perciba lote:

$$q_{s,0} = q_s \cdot l_0^s = q_s \cdot (1 - l_1^s) = \frac{M_s}{N_1} \cdot \frac{(M_s - h_s)}{M_s} = \frac{M_s - h_s}{N_1}$$

Nótese que si el número de títulos que perciben lote es el mismo en todos los sorteos ($h_s = h,\ s = 1, 2, ..., n$), la probabilidad $q_{s,1}$ es la misma para cualquier sorteo:

$$q_{s,1} = \frac{h}{N_1}$$

En realidad, la combinación de la vida aleatoria de la obligación y el fenómeno aleatorio de la percepción o no del lote da lugar a una variable aleatoria bidimensional, constituyendo las probabilidades $q_{s,j}$ su función de cuantía de probabilidad conjunta:

$$q_{s,j} = P(\eta = s;\ \Lambda_s = j)\ ;\quad s = 1, 2, ..., n;\quad j = 0, 1$$

$\eta = s \downarrow;\ \Lambda_s = j \rightarrow$	1	0	q_s
1	$q_{1,1}$	$q_{1,0}$	q_1
2	$q_{2,1}$	$q_{2,0}$	q_2
...	...	...	...
n	$q_{n,1}$	$q_{n,0}$	q_n
l_j	l_1	l_0	1

Lógicamente: $q_s = \sum_{j=0}^{1} q_{s,j}$

Y: $l_j = \sum_{s=1}^{n} q_{s,j}$, $j = 0, 1$

Siendo l_1 la probabilidad de que la obligación perciba lote cuando resulte amortizada; y l_0 la probabilidad de que la obligación no perciba lote cuando resulte amortizada.

A continuación obtenemos los posibles valores de la variable aleatoria "rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación" (i_e), que representaremos por $i_e^{s,j}$ (s = 1, 2, ..., n; j = 0, 1) y que son los tantos anuales efectivos que satisfacen, respectivamente, las 2×n ecuaciones de equivalencia financiera de la inversión en una obligación resultantes de combinar la vida aleatoria de la misma y el fenómeno aleatorio de la percepción o no del lote (cuando resulte amortizada).

En un empréstito con pago periódico de intereses pospagables, siendo variable el tipo de interés al que se abonan cupones anuales:

- Percepción de lote (j = 1).

$$V = \sum_{h=1}^{s} C \cdot i_h \cdot \left(1 + \mathrm{i}_\mathrm{e}^{s,1}\right)^{-h} + \left(C + P_s + \frac{L_s}{h_s}\right) \cdot \left(1 + i_e^{s,1}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,1} \ , \quad s = 1, 2, ..., n$$

- No percepción de lote (j = 0).

$$V = \sum_{h=1}^{s} C \cdot i_h \cdot \left(1 + \mathrm{i}_\mathrm{e}^{s,0}\right)^{-h} + \left(C + P_s\right) \cdot \left(1 + i_e^{s,0}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,0} \ , \quad s = 1, 2, ..., n$$

En el caso de que el tipo de interés al que se abonan cupones anuales fuese constante, las ecuaciones quedarían de la forma siguiente:

$$V = C \cdot i \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{s}\neg i_e^{s,1}} + \left(C + P_s + \frac{L_s}{h_s}\right) \cdot \left(1 + i_e^{s,1}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,1} \ , \quad s = 1, 2, ..., n$$

$$V = C \cdot i \cdot \mathrm{a}_{\mathrm{s}\neg i_e^{s,0}} + \left(C + P_s\right) \cdot \left(1 + i_e^{s,0}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,0} \quad , s = 1, 2, ..., n$$

Si existiese fraccionamiento de intereses, entonces sería preciso calcular previamente, para cada combinación (s, j), el tanto efectivo asociado a un *m*-ésimo de año ($i_e^{(m)s,j}$), y luego determinar el tanto anual efectivo equivalente.

En un empréstito cupón cero, siendo el tipo de interés al que se acumulan intereses variable:

- Percepción de lote (j = 1).

$$V = \left[C \cdot \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) + P_s + \frac{L_s}{h_s} \right] \cdot \left(1 + i_e^{s,1}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,1} \quad , \quad s = 1, 2, ..., n$$

- No percepción de lote (j = 0).

$$V = \left[C \cdot \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) + P_s \right] \cdot \left(1 + i_e^{s,0}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,0} \quad , \quad s = 1, 2, ..., n$$

En el caso de que el tanto al que se acumulan intereses fuese constante, las ecuaciones quedarían como sigue:

$$V = \left[C \cdot (1 + i)^s + P_s + \frac{L_s}{h_s} \right] \cdot \left(1 + i_e^{s,1}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,1} \quad , \quad s = 1, 2, ..., n$$

$$V = \left[C \cdot (1 + i)^s + P_s \right] \cdot \left(1 + i_e^{s,0}\right)^{-s} \rightarrow i_e^{s,0} \quad , \quad s = 1, 2, ..., n$$

Por tanto, sea cual sea la clase de empréstito, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria i_e, según, a su vez, las combinaciones de las variables η y Λ_s , tiene la siguiente forma (lógicamente, también es de tipo discreto):

$\eta = s$	Λ_s	$i_e = i_e^{s,j}$	$P(i_e = i_e^{s,j}) = q_{s,j}$
1	1	$i_e^{1,1}$	$q_{1,1}$
	0	$i_e^{1,0}$	$q_{1,0}$
2	1	$i_e^{2,1}$	$q_{2,1}$
	0	$i_e^{2,0}$	$q_{2,0}$
...	...	...	...
n	1	$i_e^{n,1}$	$q_{n,1}$
	0	$i_e^{n,0}$	$q_{n,0}$

Si se disponen en orden creciente los valores de la variable i_e y sus respectivas probabilidades, su función de distribución se obtiene acumulando la función de cuantía de probabilidad $q_{s,j}$:

$$F(i) = \sum_{s,j/i_e^{s,j} \leq i} q_{s,j}$$

Y la complementaria de la función de distribución es la probabilidad de que la rentabilidad efectiva de la inversión supere un cierto valor (i):

$$1 - F(i) = \sum_{s,j/i_e^{s,j} > i} q_{s,j} = P(i_e > i)$$

Así, a partir de la distribución agrupada u ordenada de i_e resulta inmediato obtener la probabilidad de que la rentabilidad efectiva de la inversión sea inferior o superior a un cierto valor, el cual puede ser la esperanza matemática de i_e –la cual se determina más abajo-, o el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas, o la rentabilidad efectiva mínima que está dispuesto a obtener el inversor, por debajo de la cual deja de interesarle la inversión; lo que, en cualquiera de los casos, constituye una forma de medir el riesgo asociado a la variable estudiada.

De la misma manera, también resulta inmediato obtener la probabilidad de que la variable i_e tome un valor compendido entre dos determinados:

$$P(i_1 < i_e \leq i_2) = F(i_2) - F(i_1) = \sum_{s,j/i_1 < i_e^{s,j} \leq i_2} q_{s,j}$$

En sentido inverso, a partir de la distribución agrupada u ordenada de i_e también se puede determinar el valor de la variable que deja a su derecha –o a su izquierda- una cierta probabilidad acumulada, esto es, el cuantil de un cierto orden de la distribución (el cual, al tratarse de una distribución de probabilidad de tipo discreto, no tiene porqué coincidir con uno de los valores posibles de la variable, por lo que bastará con la indicación de los dos valores de i_e entre los que está comprendido).

Pasando ya a los momentos de i_e, la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una obligación es:

$$E(i_e) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot P\left(i_e = i_e^{s,j}\right) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot q_{s,j}$$

No obstante, esta esperanza matemática también puede determinarse sin necesidad de calcular las probabilidades totales $q_{s,j}$, obteniendo previamente los respectivos valores medios esperados de i_e condicionados a la amortización de la obligación en cada uno de los sorteos anuales:

$$E(i_e) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot q_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot q_s \cdot l_j^s = \sum_{s=1}^{n} q_s \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot l_j^s$$

$$E(i_e) = \sum_{s=1}^{n} q_s \cdot E(i_e / \eta = s)$$

Donde $E(i_e / \eta = s) = \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot l_j^s$ es la rentabilidad efectiva media esperada condicionada a que la amortización de la obligación se produzca en el sorteo s-ésimo.

Ha de tenerse en cuenta que el valor concreto que tome la variable aleatoria "rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación" no coincidirá con su esperanza matemática (salvo casualidad de que ésta sea uno de los valores posibles de la distribución); y, también, que la representatividad de dicho valor medio esperado no es reforzada por el cumplimiento de la ley de los grandes números –como sí ocurriría si la inversión fuese en un paquete de obligaciones suficientemente grande-, pues se trata de una única exposición al azar –riesgo- y no de un ambiente estadístico.

Con objeto de medir la dispersión de la rentabilidad efectiva aleatoria respecto a su valor medio esperado podemos obtener su varianza, o, a fin de que la medida de dispersión esté expresada en las mismas unidades que la propia variable, su desviación típica. Ambas, la varianza y la desviación típica, constituyen otra forma de medir el riesgo asociado a la variable i_e que tiene en cuenta no sólo la probabilidad de desviación respecto de su esperanza matemática, sino, también, la magnitud de las desviaciones probables.

La varianza de i_e:

$$V(i_e) = \sigma^2 = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=0}^{1} \left[i_e^{s,j} - E(i_e) \right]^2 \cdot q_{s,j}$$

O, utilizando la expresión que permite calcularla en función de los dos primeros momentos en relación al origen[3]:

[3] Téngase en cuenta que el momento de orden r-ésimo respecto a la media (μ_r) puede obtenerse a partir de los r primeros momentos respecto al origen (α_r , r = 1, 2, ..., r) mediante la siguiente expresión:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \cdot (-\alpha_1)^k \cdot \alpha_{r-k}$$

$$V(i_e) = \sigma^2 = E\left[(i_e)^2\right] - \left[E(i_e)\right]^2$$

Siendo: $E\left[(i_e)^2\right] = \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\left(i_e^{s,j}\right)^2 \cdot q_{s,j}$

Por tanto, la desviación típica de i_e: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Los factores que hacen que la variable aleatoria i_e tenga una mayor o menor dispersión son las propias características complementarias –cuantas más haya y mayor sea su importancia cuantitativa[4], mayor será la varianza de i_e-, la duración del empréstito –cuanto mayor sea, menor será la varianza de i_e- y la estructuración del número de títulos a amortizar en los diferentes sorteos (M_s), que determina las probabilidades de amortización del título (q_s).

Si, a efectos de comparación del riesgo asociado a dos inversiones alternativas, se quiere medir la dispersión de la rentabilidad efectiva por unidad de rentabilidad efectiva media esperada, se puede determinar el coeficiente de variación de Pearson:

$$\delta = \frac{\sigma}{E(i_e)}$$

Como es sabido, la esperanza de rentabilidad y la varianza o la desviación típica de dicha variable son los parámetros básicos que el inversor tiene en cuenta al analizar una inversión y, en su caso, compararla con otras inversiones alternativas, resultando preferible la que, según su perfil más propenso o adverso al riesgo –que determina la pendiente de su función de utilidad-, proporcione una combinación óptima de esperanza de rentabilidad y riesgo asociado a dicha rentabilidad.

[4] La cual no sólo depende del propio importe de las características complementarias, pues el efecto de éstas se reduce notablemente –y, por tanto, la varianza de i_e- si en las condiciones de la emisión se establece un periodo de carencia (ver tercer ejemplo de aplicación).

Para completar la evaluación del riesgo asociado a la variable i_e también puede ser de interés conocer el signo de la asimetría de su distribución, es decir, a qué lado del valor medio esperado de la rentabilidad efectiva son más significativas las desviaciones probables, teniendo en cuenta tanto su valor o magnitud como la probabilidad asociada.

Como se sabe, el coeficiente de asimetría de una distribución, o primer coeficiente de Fisher, indica si los valores de la variable se hallan distribuidos o no simétricamente respecto a la media, así como el signo de dicha asimetría, y se define como el siguiente cociente:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Siendo σ^3 el cubo de la desviación típica y μ_3 el momento de tercer orden en relación a la media:

$$\mu_3 = \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\left[i_e^{s,j} - E(i_e)\right]^3 \cdot q_{s,j}$$

O, en función de los tres primeros momentos en relación al origen:

$$\mu_3 = E\left[(i_e)^3\right] - 3 \cdot E(i_e) \cdot E\left[(i_e)^2\right] + 2 \cdot \left[E(i_e)\right]^3$$

Donde: $E\left[(i_e)^3\right] = \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}\left(i_e^{s,j}\right)^3 \cdot q_{s,j}$

Lógicamente, siempre será preferible que la distribución de la rentabilidad efectiva sea asimétrica positiva, esto es, hacia la derecha de su esperanza matemática; lo cual será lo lógico si en las condiciones de la emisión se prevén prima de emisión y, sobre todo, pago de lote.

No obstante, la interpretación del coeficiente de asimetría debe realizarse teniendo en cuenta cuál es la probabilidad de que la rentabilidad efectiva sea superior a la esperanza matemática de i_e –ver más abajo los ejemplos de aplicación-, pues, sino, podría llevar a conclusiones desacertadas.

Por último, es interesante poner en relación la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una obligación y el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas.

En tal sentido, y después de haber realizado las oportunas pruebas de cálculo numérico, puede afirmarse que, salvo que el número de títulos a amortizar cada año decrezca a un elevado ritmo y el tipo de interés o la prima de amortización sean crecientes, la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una obligación será superior al tanto efectivo del conjunto de obligacionistas; y que, en cualquier caso, aquel valor medio esperado estará tanto más próximo al valor de esta variable cierta cuanto menor sea, a su vez, la varianza de i_e (es decir, cuanto mayor sea la duración total del empréstito y menor sea la importancia de las características complementarias, principalmente).

Además, el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas puede ser considerado el "valor financiero medio" –no el valor medio esperado, en sentido estadístico-matemático estricto- de la variante "rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación"[5], por la razón de que, como puede demostrarse, es el tanto para el cual se satisface la ecuación de equivalencia entre el valor cierto de la prestación efectiva que desembolsa el obligacionista por la obligación y el valor medio esperado de la contraprestación que percibirá[6]. Y, en virtud de lo dicho acerca de su relación con la esperanza matemática de i_e, su valor como parámetro relevante a efectos de la decisión de invertir será mayor cuanto menor sea la varianza de dicha variable aleatoria.

---

[5] RODRÍGUEZ, A. (1994): p. 349-350.

[6] Así, por ejemplo, para el caso de un empréstito con cupón vencido constante, prima de emisión y prima de amortización P_s , s = 1, 2, ..., n, dicha ecuación de equivalencia es la siguiente:

$$V = \sum_{s=1}^{n} \left[C \cdot i \cdot a_{s\neg i_a} + \left(C + P_s\right) \cdot (1 + i_a)^{-s} \right] \cdot \frac{M_s}{N_1}$$

La demostración de esta igualdad puede encontrarse en GONZÁLEZ CATALÁ, V.T. (1992): p. 237-238.

Por otra parte, el análisis de la rentabilidad efectiva de un título puede acompañarse de alguna medida de la vida de éste, pues el horizonte temporal de la inversión también puede ser una variable importante para el inversor. Así, establecida la distribución de probabilidad de la vida de una obligación, su vida media esperada –en el momento en que es emitida- se puede obtener de forma inmediata:

$$m = E(\eta) = \sum_{s=1}^{n} s \cdot q_s = \sum_{s=1}^{n} s \cdot \frac{M_s}{N_1} = \frac{1}{N_1} \cdot \sum_{s=1}^{n} s \cdot M_s$$

Sin embargo, la representatividad de este valor medio esperado es limitada, especialmente si la duración total del empréstito es corta.

Si, en vez de un único título, el obligacionista suscribiese un grupo de títulos de la misma emisión, la rentabilidad efectiva media esperada de dicha cartera no concidiría con la que se ha determinado para una obligación, pues surgirían numerosas combinaciones posibles de las vidas de los diferentes títulos –las cuales, situándose en el momento de la emisión, son variables aleatorias estocásticamente independientes entre sí- y de la percepción o no de lote por cada uno de los mismos –siendo, en el momento de la emisión, la percepción de lote por una obligación independiente de la percepción de lote por otra obligación cualquiera de la cartera-, de forma que cada combinación daría lugar a un valor distinto de la variable aleatoria "rentabilidad efectiva de la cartera", con su respectiva probabilidad asociada.

Por consiguiente, la obtención de la distribución de probabilidad de dicha variable aleatoria puede ser muy laboriosa.

No obstante, puede afirmarse que cuanto mayor sea el número de obligaciones suscritas, la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión, además de ser más representativa de los valores posibles de la rentabilidad efectiva aleatoria, estará más cerca del tanto efectivo del conjunto de obligacionistas; y que, lógicamente, la varianza de la rentabilidad efectiva de la inversión irá reduciéndose, tendiendo a anularse cuanto más próximo esté el valor medio esperado de dicha variable al tanto efectivo del conjunto de obligacionistas (que es una variable cierta).

De esta forma, al aumentar el tamaño de su cartera de obligaciones del empréstito, el inversor reduce, siempre, el riesgo asociado a la rentabilidad efectiva de su inversión (la dispersión de dicha variable aleatoria); pero, a la vez, lo más probable es que renuncie a parte de la esperanza de rentabilidad efectiva, pues, como ya se ha indicado más arriba, salvo en ciertos casos muy concretos, la rentabilidad efectiva media esperada de una obligación se sitúa por encima del tanto efectivo del conjunto de obligacionistas. El tamaño óptimo de la cartera, para un inversor determinado, dependerá de su función de utilidad, pues será el que proporcione una combinación óptima de esperanza de rentabilidad y riesgo asociado a dicha rentabilidad[7].

En el caso contrario, de que el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas sea superior a la rentabilidad efectiva media esperada de una obligación, la ampliación de la cartera será una decisión óptima tanto desde el punto de vista del riesgo –que se reducirá, pues se tiende a una rentabilidad cierta- como desde el de la esperanza de rentabilidad (que, lógicamente, aumentará, al aproximarse al tanto efectivo del conjunto de obligacionistas).

En cualquier caso, cuanto mayor sea la cartera, más valor cobra el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas como parámetro relevante para el inversor, y menos importante es el error que se comete al no tener en cuenta el riesgo asociado (pues menor es la varianza de la rentabilidad efectiva de la inversión).

Asimismo, cuando se trata de una cartera de obligaciones de la misma emisión, el valor informativo de la vida media esperada de la cartera es mayor que en el caso de un sólo título.

Finalmente, hay que destacar que todas las probabilidades que aquí se han definido son de naturaleza objetiva –se obtienen mediante el conocido como método de Laplace: número de casos favorables entre número de casos posibles-, no estimaciones de carácter más o menos subjetivo; lo cual refuerza el uso de la distribución de probabilidad de la variable tanto efectivo de rentabilidad de un obligacionista (i_e), así como el de sus momentos.

[7] La resolución de este problema de decisión excede los límites de este trabajo.

4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

4.1. Primer ejemplo: empréstito a seis años con pago periódico de intereses, prima de emisión, prima de amortización y lote.

Se emite un empréstito a seis años, formado por 100.000 títulos, de 5.000 ptas. de nominal y un valor de emisión de 4.800 ptas. El cupón anual vencido constante es de 400 ptas., y el valor de reembolso de las obligaciones incluye una prima de amortización constante de 250 ptas. Así mismo, existe la posibilidad de percibir un lote cuyo importe total asciende a 5.000.000 ptas., a repartir entre los 1.000 primeros títulos que resulten amortizados en cada sorteo. La anualidad que amortiza el empréstito es constante.

Para empezar el estudio procedemos a determinar el cuadro de amortización del empréstito, lo que permitirá conocer las cantidades anuales que ha de satisfacer el emisor al conjunto de obligacionistas –las anualidades activas-, cuya estructura, dadas las características del empréstito emitido, será la siguiente:

$$a_s = a = C \cdot i \cdot N_s + (C+P) \cdot M_s + L$$

Para obtener la anualidad constante que amortiza el empréstito es necesario llevar a cabo un proceso de normalización, que permita equiparar la estructura de la anualidad pasiva con características complementarias –que coincide con la anualidad activa, al no haber características unilaterales- a la de un empréstito puro o sin características complementarias. Una vez obtenida la anualidad normalizada, y calculado, a partir de la misma, el número de títulos que se amortizarán en cada sorteo anual, resulta el siguiente cuadro de amortización:

s	$a_s = C{\cdot}i{\cdot}N_s + (C+P){\cdot}M_s + L$	$C{\cdot}i{\cdot}N_s$	$(C+P)\cdot M_s$	M_s	m_s	N_{s+1}
0	-	-	-	-	-	100.000
1	117.255.750	40.000.000	72.255.750	13.763	13.763	86.237
2	117.257.800	34.494.800	77.763.000	14.812	28.575	71.425
3	117.255.000	28.570.000	83.685.000	15.940	44.515	55.485
4	117.257.750	22.194.000	90.063.750	17.155	61.670	38.330
5	117.257.500	15.332.000	96.925.500	18.462	80.132	19.868
6	117.254.200	7.947.200	104.307.000	19.868	100.000	0

Construido el cuadro de amortización del empréstito, se pasa al análisis de la rentabilidad efectiva que obtiene el suscriptor de una obligación.

Como se ha expuesto más arriba, dicha rentabilidad efectiva es aleatoria por serlo la vida de la obligación y la percepción de lote. Por tanto, para obtener la distribución de probabilidad de la variante "rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación" (i_e), es preciso determinar en primer lugar las distribuciones de las dos variables aleatorias de las que depende. Los resultados obtenidos son los que se recogen en las dos tablas siguientes:

- Distribución de probabilidad de la variante "vida de una obligación":

$\eta = s$	$P(\eta = s) = q_s = M_s / N_1$
1	0,137630
2	0,148120
3	0,159400
4	0,171550
5	0,184620
6	0,198680

La vida media esperada de una obligación es 3,71 años.

- Distribución de probabilidad de la variante "percepción de lote", por sorteo/año:

s	$P(\Lambda_s = 1) = l_1^s = h_s/M_s$	$P(\Lambda_s = 0) = l_0^s = 1 - l_1^s$
1	0,072659	0,927341
2	0,067513	0,932487
3	0,062735	0,937265
4	0,058292	0,941708
5	0,054165	0,945835
6	0,050332	0,949668

Por tanto, las probabilidades totales de amortización del título con y sin lote ($q_{s,j} = P(\eta = s;\ \Lambda_s = j)$) son las siguientes:

$\eta = s\downarrow;\ \Lambda_s = j \rightarrow$	1	0	q_s
1	0,010000	0,127630	0,137630
2	0,010000	0,138120	0,148120
3	0,010000	0,149400	0,159400
4	0,010000	0,161550	0,171550
5	0,010000	0,174620	0,184620
6	0,010000	0,188680	0,198680
l_j	0,060000	0,940000	1

Como puede observarse, la probabilidad de que la obligación perciba lote cuando resulte amortizada (l_1) es del 6%; y, lógicamente, del 94% la de que no perciba lote cuando resulte amortizada (l_0).

Las probabilidades $q_{s,j}$ de la tabla anterior son las que corresponden a los distintos valores que puede tener la variante i_e ($i_e^{s,j}$), los cuales son los tantos anuales efectivos que satisfacen, respectivamente, las 12 ecuaciones de equivalencia financiera de la inversión en una obligación resultantes de combinar la vida aleatoria de la misma y el fenómeno aleatorio de la percepción o no del lote –ver más arriba-, y que se han calculado por medio de hoja de cálculo.

Así, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria i_e es:

$\eta = s$	Λ_s	$i_e = i_e^{s,j}$	$P\left(i_e = i_e^{s,j}\right) = q_{s,j}$
1	1	1,218750	0,010000
	0	0,177083	0,127630
2	1	0,531796	0,010000
	0	0,127401	0,138120
3	1	0,354395	0,010000
	0	0,111348	0,149400
4	1	0,273751	0,010000
	0	0,103432	0,161550
5	1	0,227809	0,010000
	0	0,098728	0,174620
6	1	0,198197	0,010000
	0	0,095619	0,188680

Como se observa en esta distribución, la rentabilidad efectiva que puede obtener el obligacionista oscila entre un mínimo del 9,5619%, en el caso de que el título resulte amortizado en el último año y no perciba lote, y un 121,875%, si se amortiza en el primer sorteo y percibe lote. Esta importante diferencia se debe al efecto conjunto de los dos factores aleatorios ya señalados:

- Por un lado, la percepción de lote, que, de producirse, proporciona al obligacionista un elemento adicional de contraprestación que eleva sustancialmente la rentabilidad efectiva de su inversión.

- Y, por otro, el sorteo en que resulte amortizada, que cuanto más se retrase provocará la dilución en un mayor período de tiempo de los elementos de la contraprestación que percibe el obligacionista cuyas cuantías son independientes de la vida del título. De esta forma, cuanto mayor es la duración de la inversión, menor es la rentabilidad efectiva.

Ordenando de menor a mayor los valores $i_e^{s,j}$ y acumulando las probabilidades asociadas ($P\left(i_e = i_e^{s,j}\right) = q_{s,j}$) a los mismos, obtenemos la función de distribución de la variante i_e para todos sus valores posibles, que es la probabilidad de que la rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación sea inferior o igual a cada uno de dichos valores. La siguiente tabla indica dicha probabilidad acumulada, así como su complementaria (la probabilidad de que la rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación supere cada uno de dichos valores posibles):

$i_e = i_e^{s,j}$	$P\left(i_e = i_e^{s,j}\right) = q_{s,j}$	$F(i_e^{s,j}) = P(i_e \leq i_e^{s,j})$	$P(i_e > i_e^{s,j})$
0,095619	0,188680	0,188680	0,811320
0,098728	0,174620	0,363300	0,636700
0,103432	0,161550	0,524850	0,475150
0,111348	0,149400	0,674250	0,325750
0,127401	0,138120	0,812370	0,187630
0,177083	0,127630	0,940000	0,060000
0,198197	0,010000	0,950000	0,050000
0,227809	0,010000	0,960000	0,040000
0,273751	0,010000	0,970000	0,030000
0,354395	0,010000	0,980000	0,020000
0,531796	0,010000	0,990000	0,010000
1,218750	0,010000	1,000000	0,000000

A continuación obtenemos la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una obligación:

$$E\left(i_e\right) = \sum_{s=1}^{6} \sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot q_{s,j} = 0{,}136871$$

Al no tratarse, como se ha dicho más arriba, de un ambiente estadístico, este valor medio esperado debe ponerse en relación, en primer lugar, con la función de distribución expuesta más arriba, de la cual se desprende que la probabilidad de que la rentabilidad efectiva finalmente obtenida resulte inferior a dicha media es del 81,237% (que es la probabilidad de que la rentabilidad efectiva no supere el 12,74% anual); y, en segundo lugar, y para medir el riesgo asociado a la variable "rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación" teniendo en cuenta no sólo la probabilidad de desviación respecto de su media, sino, también, la magnitud de las desviaciones probables, con su desviación típica, la cual tiene el siguiente valor:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{s=1}^{6}\sum_{j=0}^{1}\left[i_e^{s,j} - E(i_e)\right]^2 \cdot q_{s,j}} = 0{,}122951$$

Asimismo, con objeto de complementar dicha información, podemos determinar el coeficiente de asimetría o primer coeficiente de Fisher de la distribución de i_e:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0{,}013394$$

Lo cual indica que la asimetría de esta distribución, siendo escasa –su grado de simetría respecto a la media es alto, por ser el valor del coeficiente próximo a cero-, es hacia la derecha, debido a que las desviaciones favorables o ganancias potenciales respecto a la rentabilidad efectiva media esperada son muy superiores, en valor, a las desviaciones desfavorables o pérdidas potenciales respecto a la misma (aunque en términos de probabilidad sea justo al revés, como ya se ha observado).

Sin embargo, todas estas medidas del riesgo asociado a la inversión no permiten extraer, con carácter general, conclusiones objetivas, pues la decisión del inversor dependerá, como también se ha indicado más arriba, de su grado de aversión al riesgo (a la vista de la combinación "esperanza de rentabilidad efectiva – riesgo asociado").

Por otra parte, el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas (i_a) se obtiene a partir de la siguiente ecuación de equivalencia financiera (habiéndose calculado también por medio de hoja de cálculo):

$$4.800 \times 100.000 = \sum_{s=1}^{6} a_s \cdot (1+i_a)^{-s} \rightarrow i_a = 0{,}121535$$

Como se observa, la rentabilidad cierta que obtendría un inversor que suscribiese todo el empréstito es algo más de un punto y medio inferior a la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en un título.

No obstante, debe tenerse en cuenta que dicha rentabilidad cierta –que, como se ha dicho más arriba, también puede interpretarse como la rentabilidad efectiva media en un sentido financiero- es el valor al que tenderá la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una cartera de obligaciones de la misma emisión, a medida que el número de títulos que la componen sea mayor (a la vez que disminuiría la desviación típica de la rentabilidad efectiva).

4.2. Segundo ejemplo: empréstito a cinco años con pago acumulado de intereses y lote.

Se emite un empréstito a amortizar en 5 años, formado por 100.000 obligaciones de 5.000 ptas. de nominal. El valor de reembolso del título incluye los intereses acumulados hasta la fecha. El tanto anual al que se acumulan intereses es del 7% el primer año, incrementándose un 0,5% por cada año más. El emisor entrega, asimismo, un lote constante de 5.000.000 ptas., a distribuir entre los 1.000 primeros títulos que se amorticen en cada sorteo. El número de obligaciones que se amortiza cada año es constante.

En este caso, las anualidades activas tienen la siguiente estructura:

$$a_s = C_s \cdot M + L = \left[C \cdot \prod_{h=1}^{s} (1+i_h) \right] \cdot M + L$$

El cuadro de amortización del empréstito se puede construir directamente –es decir, sin necesidad de efectuar el proceso de normalización-, dado que se ha prefijado el número de títulos a amortizar cada año (20.000):

S	i_s	$a_s = C_s \cdot M_s + L$	C_s	$C_s \cdot M_s$	M_s	m_s	N_{s+1}
0	-	-	-	-	-	-	100.000
1	0,070	112.000.000,00	5.350,00	107.000.000,00	20.000	20.000	80.000
2	0,075	120.025.000,00	5.751,25	115.025.000,00	20.000	40.000	60.000
3	0,080	129.227.000,00	6.211,35	124.227.000,00	20.000	60.000	40.000
4	0,085	139.786.295,00	6.739,31	134.786.295,00	20.000	80.000	20.000
5	0,090	151.917.061,55	7.345,85	146.917.061,55	20.000	100.000	0

A continuación comenzamos el análisis estocástico de la rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación (i_e).

En primer lugar determinamos las distribuciones de probabilidad de las dos variables aleatorias de las que depende i_e:

- Distribución de probabilidad de la variante "vida de una obligación":

$\eta = s$	$P(\eta = s) = q_s = M / N_1$
1	0,20
2	0,20
3	0,20
4	0,20
5	0,20

La vida media esperada de una obligación es 3 años.

- Distribución de probabilidad de la variante "percepción de lote",por sorteo/año:

s	$P(\Lambda_s = 1) = l_1^s = h/M$	$P(\Lambda_s = 0) = l_0^s = 1 - l_1^s$
1	0,05	0,95
2	0,05	0,95
3	0,05	0,95
4	0,05	0,95
5	0,05	0,95

Por tanto, las probabilidades totales de amortización del título con y sin lote $\left(q_{s,j} = P(\eta = s;\ \Lambda_s = j)\right)$ son las siguientes:

$\eta = s \downarrow;\ \Lambda s = j \rightarrow$	1	0	q_s
1	0,01	0,19	0,20
2	0,01	0,19	0,20
3	0,01	0,19	0,20
4	0,01	0,19	0,20
5	0,01	0,19	0,20
lj	0,05	0,95	1

Como puede observarse, la probabilidad de que la obligación perciba lote cuando resulte amortizada (l_1) es del 5%; frente a un 95% de probabilidad de no percibir lote en su amortización (l_0).

Los distintos valores de la variable aleatoria i_e $\left(i_e^{s,j}\right)$ son los tantos anuales efectivos que satisfacen, respectivamente, las 10 ecuaciones de equivalencia financiera de la inversión en una obligación resultantes de considerar las posibles duraciones y la percepción o no del lote –ver más arriba-, y se han calculado mediante hoja de cálculo. Si se disponen dichos valores junto con sus correspondientes probabilidades $q_{s,j}$ se obtiene la distribución de probabilidad de la variable aleatoria i_e:

$\eta = s$	Λ_s	$i_e = i_e^{s,j}$	$P\left(i_e = i_e^{s,j}\right) = q_{s,j}$
1	1	1,0700	0,01
	0	0,0700	0,19
2	1	0,4664	0,01
	0	0,0725	0,19
3	1	0,3089	0,01
	0	0,0750	0,19
4	1	0,2379	0,01
	0	0,0775	0,19
5	1	0,1981	0,01
	0	0,0800	0,19

Como se observa, la rentabilidad efectiva que puede obtener el obligacionista oscila entre un mínimo del 7%, en el caso de que el título resulte amortizado en el primer año y no perciba lote, y un 107%, si se amortiza en dicho primer sorteo pero percibe lote.

Asimismo, se observa que, en el caso de no percepción de lote ($\Lambda_s = 0$, $s = 1, 2, 3, 4, 5$), la rentabilidad efectiva crece con la vida del título, como consecuencia de la acumulación de intereses a un tipo creciente.

Ordenando de menor a mayor los valores $i_e^{s,j}$ y acumulando sus respectivas probabilidades se obtiene la función de distribución de la variable aleatoria i_e. La tabla siguiente indica dicha probabilidad acumulada, así como su complementaria:

$i_e = i_e^{s,j}$	$P\left(i_e = i_e^{s,j}\right) = q_{s,j}$	$F(i_e^{s,j}) = P(i_e \le i_e^{s,j})$	$P(i_e > i_e^{s,j})$
0,0700	0,19	0,19	0,81
0,0725	0,19	0,38	0,62
0,0750	0,19	0,57	0,43
0,0775	0,19	0,76	0,24
0,0800	0,19	0,95	0,05
0,1981	0,01	0,96	0,04
0,2379	0,01	0,97	0,03
0,3089	0,01	0,98	0,02
0,4664	0,01	0,99	0,01
1,0700	0,01	1	0

Pasando a los momentos de i_e, la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una obligación es:

$$E\left(i_e\right) = \sum_{s=1}^{5}\sum_{j=0}^{1} i_e^{s,j} \cdot q_{s,j} = 0{,}094053$$

y la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{s=1}^{5}\sum_{j=0}^{1}\left[i_e^{s,j} - E\left(i_e\right)\right]^2 \cdot q_{s,j}} = 0{,}109748$$

El valor medio esperado de i_e, además de con su desviación típica, debe ponerse en relación con su función de distribución, de la cual se desprende que la probabilidad de que la rentabilidad efectiva finalmente obtenida resulte inferior o igual al 8% anual es del 95%, de forma que la media está sensiblemente desplazada hacia la derecha de los valores más probables; es decir, que es enormemente más probable obtener una rentabilidad efectiva inferior a la media esperada que una superior a la misma.

Dicha información se completa con el coeficiente de asimetría de la distribución de i_e:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 7{,}52317$$

Este valor indica una fuerte asimetría de la distribución de i_e hacia la derecha de su valor medio esperado, debido, al igual que en el primer ejemplo, a que las ganancias potenciales respecto a la rentabilidad efectiva media esperada son muy superiores, en valor, a las desviaciones negativas o pérdidas potenciales respecto a la misma (aunque, y de forma más acusada que en el ejemplo anterior, en términos de probabilidad sea justo al revés, como ya se ha indicado).

Por otra parte, el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas (i_a) se obtiene a partir de la siguiente ecuación de equivalencia financiera (habiéndose calculado también por medio de hoja de cálculo):

$$5.000 \times 100.000 = \sum_{s=1}^{5} a_s \cdot (1 + i_a)^{-s} \Rightarrow i_a = 0{,}090969$$

Rentabilidad cierta que, como se observa, es inferior a la media esperada de la inversión en una obligación, y que representa el valor al que tenderá la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una cartera de obligaciones de la misma emisión, a medida que el número de títulos que la componen sea mayor (a la vez que disminuiría la desviación típica de la rentabilidad efectiva).

4.3. Tercer ejemplo: empréstito a veinte años, siendo cinco de carencia, con pago periódico de intereses y prima de emisión.

Se emite un empréstito a veinte años, siendo los cinco primeros de carencia en la amortización. El empréstito está formado por 200.000 títulos, de 5.000 ptas. de nominal y un valor de emisión de 4.700 ptas. El cupón anual vencido constante es de 400 ptas. A partir del comienzo de la amortización del empréstito, la anualidad es constante.

En este caso, las anualidades activas tienen esta sencilla estructura, pues no hay características complementarias que les afecten:

$$a_s = a = C{\cdot}i{\cdot}N_s + C{\cdot}M_s$$

El cuadro de amortización del empréstito:

s	$a_s = C{\cdot}i{\cdot}N_s + C{\cdot}M_s$	$C{\cdot}i{\cdot}N_s$	$C \cdot M_s$	M_s	m_s	N_{s+1}
0	-	-	-	-	-	200.000
1	80.000.000	80.000.000	0	0	0	200.000
2	80.000.000	80.000.000	0	0	0	200.000
3	80.000.000	80.000.000	0	0	0	200.000
4	80.000.000	80.000.000	0	0	0	200.000
5	80.000.000	80.000.000	0	0	0	200.000
6	116.830.000	80.000.000	36.830.000	7.366	7.366	192.634
7	116.828.600	77.053.600	39.775.000	7.955	15.321	184.679
8	116.831.600	73.871.600	42.960.000	8.592	23.913	176.087
9	116.829.800	70.434.800	46.395.000	9.279	33.192	166.808
10	116.828.200	66.723.200	50.105.000	10.021	43.213	156.787
11	116.829.800	62.714.800	54.115.000	10.823	54.036	145.964
12	116.830.600	58.385.600	58.445.000	11.689	65.725	134.275
13	116.830.000	53.710.000	63.120.000	12.624	78.349	121.651
14	116.830.400	48.660.400	68.170.000	13.634	91.983	108.017
15	116.826.800	43.206.800	73.620.000	14.724	106.707	93.293
16	116.827.200	37.317.200	79.510.000	15.902	122.609	77.391
17	116.831.400	30.956.400	85.875.000	17.175	139.784	60.216
18	116.831.400	24.086.400	92.745.000	18.549	158.333	41.667
19	116.826.800	16.666.800	100.160.000	20.032	178.365	21.635
20	116.829.000	8.654.000	108.175.000	21.635	200.000	0

La única distribución de probabilidad que es preciso obtener para realizar el análisis estocástico de la rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación (i_e) es la de la variante "vida de una obligación", en la cual hay que tener en cuenta que, al ser los cinco primeros años de carencia, el primer valor posible de la variable es 6:

$\eta = s$	$P(\eta = s) = q_s = M_s / N_1$
6	0,036830
7	0,039775
8	0,042960
9	0,046395
10	0,050105
11	0,054115
12	0,058445
13	0,063120
14	0,068170
15	0,073620
16	0,079510
17	0,085875
18	0,092745
19	0,100160
20	0,108175

La vida media esperada de una obligación es 14,41 años.

Los distintos valores de la variable aleatoria i_e $\left(i_e^s\right)$ son los tantos anuales efectivos que satisfacen, respectivamente, las 15 ecuaciones de equivalencia financiera de la inversión en una obligación, cada una resultante de uno de los valores posibles de la vida aleatoria de la misma (s = 6, 7, ..., 20), y se han calculado mediante hoja de cálculo. Si se disponen dichos valores junto con sus correspondientes probabilidades q_s se obtiene la distribución de probabilidad de la variable aleatoria i_e:

$\eta = s$	$i_e = i_e^s$	$P(i_e = i_e^s) = q_s$
6	0,093516	0,036830
7	0,092002	0,039775
8	0,090876	0,042960
9	0,090008	0,046395
10	0,089321	0,050105
11	0,088765	0,054115
12	0,088308	0,058445
13	0,087925	0,063120
14	0,087602	0,068170
15	0,087326	0,073620
16	0,087089	0,079510
17	0,086883	0,085875
18	0,086703	0,092745
19	0,086545	0,100160
20	0,086405	0,108175

Como se observa, la rentabilidad efectiva que puede obtener el obligacionista oscila entre un mínimo del 8,6405%, en el caso de que el título resulte amortizado en el último año, y un 9,3516%, si se amortiza en el sexto (primer sorteo).

La rentabilidad efectiva es decreciente con la vida de la obligación por la razón, ya indicada en el primer ejemplo, de que cuanto más se retrase su amortización, los elementos de la contraprestación que percibe el obligacionista cuyas cuantías son independientes de la vida del título se diluirán en un mayor período de tiempo.

Ordenando de menor a mayor los valores de i_e y acumulando sus respectivas probabilidades se obtiene la función de distribución de dicha variable aleatoria. La tabla siguiente indica dicha probabilidad acumulada, así como su complementaria:

$i_e = i_e^s$	$P(i_e = i_e^s) = q_s$	$F(i_e^s) = P(i_e \le i_e^s)$	$P(i_e > i_e^s)$
0,086405	0,108175	0,108175	0,891825
0,086545	0,100160	0,208335	0,791665
0,086703	0,092745	0,301080	0,698920
0,086883	0,085875	0,386955	0,613045
0,087089	0,079510	0,466465	0,533535
0,087326	0,073620	0,540085	0,459915
0,087602	0,068170	0,608255	0,391745
0,087925	0,063120	0,671375	0,328625
0,088308	0,058445	0,729820	0,270180
0,088765	0,054115	0,783935	0,216065
0,089321	0,050105	0,834040	0,165960
0,090008	0,046395	0,880435	0,119565
0,090876	0,042960	0,923395	0,076605
0,092002	0,039775	0,963170	0,036830
0,093516	0,036830	1,000000	0,000000

La rentabilidad efectiva media esperada de la inversión en una obligación es:

$$E(i_e) = \sum_{s=6}^{20} i_e^s \cdot q_s = 0{,}088016$$

A la vista de la función de distribución de i_e, la probabilidad de que la rentabilidad efectiva finalmente obtenida resulte inferior o igual al 8,7925% anual es del 67,1375%, de forma que la media, al igual que en los ejemplos anteriores, está desplazada hacia la derecha de los valores más probables. No obstante, en este caso, aunque la probabilidad de desviación desfavorable respecto de la rentabilidad efectiva media esperada es relativamente alta, la magnitud de la posible desviación negativa es muy pequeña –la máxima es de 0,16%, lo que no ocurría en los otros dos ejemplos.

Si calculamos la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{s=6}^{20} \left[i_e^s - E(i_e)\right]^2 \cdot q_s} = 0{,}001813$$

Se comprueba que, como ya indicaba el reducido recorrido de la variable –menos de un punto-, la dispersión de la variable i_e es mucho menor que en los ejemplos anteriores[8], debido a que la duración del empréstito es mayor, a que existen menos características complementarias, y a que el efecto de la única existente, la prima de emisión, es amortiguado por el periodo de carencia.

Además, si nos fijamos en que, aún siendo menos del 33% la probabilidad de obtener una rentabilidad efectiva superior a la media esperada, se puede conseguir más de un 0,55% más de rentabilidad respecto de la misma, ello indica que la asimetría de esta distribución ha de ser, al igual que en los ejemplos anteriores, hacia la derecha.

En efecto, el valor del coeficiente de asimetría de la distribución de i_e es:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 1{,}50319$$

Finalmente, el tanto efectivo del conjunto de obligacionistas (i_a) se obtiene a partir de la siguiente ecuación de equivalencia financiera (habiéndose calculado también por medio de hoja de cálculo):

$$4.700 \times 200.000 = \sum_{s=1}^{20} a_s \cdot (1 + i_a)^{-s} \Rightarrow i_a = 0{,}087711$$

Rentabilidad cierta que, como se observa, se sitúa por debajo pero muy cerca del valor medio esperado de la rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación, al ser la desviación típica de dicha variante muy reducida; y que representa el valor al que irá aproximándose la rentabilidad efectiva media esperada de la inversión

[8] En efecto, el coeficiente de variación de Pearson de la rentabilidad efectiva de la inversión en una obligación es 0,90 en el primer ejemplo, 1,17 en el segundo, y 0,021 en este tercero.

en una cartera de obligaciones de la misma emisión, a medida que el número de títulos que la componen sea mayor.

BIBLIOGRAFÍA.

[1] ALEGRE, A.; FONTANALS, H. (1989): "*Análisis financiero de un empréstito: comparación entre los empréstitos normal y cupón cero*". Colección de Publicaciones del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Barcelona: Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Barcelona.
[2] BETZUEN ZALBIDEGOITIA, A. (1992): "*Curso de matemáticas financieras: Operaciones de préstamo. Operaciones de empréstito-obligaciones*". Bilbao: Instituto de Estudios Financiero-Actuariales.
[3] DE PABLO LÓPEZ, A. (1995): "*Matemática de las operaciones financieras*". Tomo II. Segunda edición. Madrid: UNED.
[4] GIL PELÁEZ, L. (1989): "*Matemática de las operaciones financieras*". Madrid: AC.
[5] GONZÁLEZ CATALÁ, V. T. (1992): "*Análisis de las operaciones financieras, bancarias y bursátiles*". Madrid: Ciencias Sociales.
[6] MENEU, V.; M.P. JORDÁ; M.T. BARREIRA. (1996): "*Operaciones financieras en el mercado español*". Barcelona: Ariel.
[7] PRIETO PÉREZ, E. (1992): "Análisis financiero de los empréstitos-obligaciones". Madrid: ICE.
[8] RODRÍGUEZ, A. (1994): "*Matemática de la financiación*". Barcelona: Ediciones S.