EL RIESGO DE LONGEVIDAD EN LOS PLANES DE PENSIONES

Jesús Vegas Asensio
Catedrático de Matemática Actuarial
de la Universidad Complutense de Madrid

PALABRAS CLAVE: Planes de aportación definida y de prestación definida; contigencia de jubilación; planteamiento determinista y estocástico multidecremental; riesgo de longevidad; Suma actuarial de nivel α en los distintos métodos de evaluación del coste actuarial; Fórmula de Haldane Tipo A.

1. INTRODUCCIÓN

Las Tablas de Mortalidad y de Supervivencia recogen los valores I_x o estimaciones de la media o esperanza matemática E [L(x)], donde L(x) es la variable aleatoria que mide el número de supervivientes a la edad (x) de un colectivo I_0 de recién nacidos.

Teniendo en cuenta que

$$L(x) = \sum_{j=1}^{I_0} I_j$$

con

$$I_J = \begin{cases} 1 & \text{si la cabeza (j) vive a la edad (x)} \\ 0 & \text{si la cabeza (j) no vive a la edad (x)} \end{cases}$$

resulta que, supuesta la independencia de los sumandos, L(x) sigue una distribución Binomial positiva de parámetros n= I_0 y p = s(x), donde s(x) es la función de supervivencia a la edad (x), es decir la probabilidad de que un recién nacido alcance la citada edad P[T(0) > x]

En consecuencia, el Riesgo de mortalidad o de supervivencia está asociado a la correcta estimación de los promedios $I_x = I_0\ s(x)$ en el colectivo de partícipes y beneficiarios a que se refiere el Plan de Pensiones objeto de estudio. Es decir a la aplicación de unas Tablas actuariales "correctas" desde el punto de vista estadístico para medir las verdaderas probabilidades de mortalidad y/o supervivencia que prevalecen en el colectivo de pensiones.

Sin embargo, el Riesgo de Longevidad tiene una naturaleza diferente, ya que a partir de una Tabla actuarial estimada adecuadamente, lo podemos definir como el riesgo asociado a que valor actual actuarial de las prestaciones a favor de una cabeza sea inferior al valor actual necesario para pagar las citadas prestaciones en los términos previstos en el Reglamento del Plan de pensiones.

Por tanto, el Riesgo de Longevidad lo podemos vincular a las fluctuaciones aleatorias de las prestaciones con respecto al promedio utilizado, derivadas de la mayor o menor supervivencia del beneficiario respecto a sus valores medios o esperados.

En este artículo nos referimos exclusivamente al Riesgo de Longevidad y no al consecuente de la aplicación de una Tabla inadecuada para medir, por ejemplo, las probabilidades de supervivencia y fallecimiento p_x y q_x . Se trata, pues, de un riesgo actuarial, en sentido amplio, para el Plan de pensiones.

2. PLANES DE PENSIONES DE APORTACIÓN DEFINIDA

Como es bien sabido en la legislación española un plan de pensiones define el derecho de las personas a cuyo favor se constituye, a percibir rentas o capitales por jubilación, supervivencia, viudedad, orfandad o invalidez y las obligaciones de contribución al mismo. Asimismo, la ley configura un fondo de pensiones como un patrimonio creado al exclusivo objeto de dar cumplimiento al plan o planes adscritos a él y cuya gestión y control se realizan por la entidad gestora y la custodia se encomienda a una entidad depositaria.

Pueden ser entidades gestoras de fondos de pensiones las sociedades anónimas que, habiendo obtenido autorización administrativa previa, reúnan una serie de requisitos formales establecidos en la ley; también podrán ser entidades gestoras de fondos de pensiones las entidades aseguradoras autorizadas a operar en España en los seguros de vida que cumplan determinadas condiciones legales.

Respecto a la entidad depositaria, se trata de una entidad de depósito (banco, cajas de ahorro) cuya misión fundamental es la custodia y depósito de los valores mobiliarios y demás activos financieros integrados en el fondo de pensiones.

CLASES DE PLANES

1. Según la naturaleza del promotor:

-Sistema de empleo: El promovido por una empresa en favor de sus empleados.

-Sistema asociado: Lo promueve un colectivo en favor de sus miembros (colegios profesionales, asociaciones, clubs, etc.)

-Sistema individual: Promovido por entidades financieras (bancos, compañías de seguros) para que cualquier persona física que lo desee se adhiera, excepto las personas vinculadas a ella y familiares hasta el tercer grado inclusive.

2. Según las obligaciones estipuladas:

-Plan de prestación definida: Define la cuantía de las prestaciones a recibir por el partícipe y las aportaciones se calculan en base a ellas.

-Plan de aportación definida: Donde se define la cuantía de la aportación al plan.

-Plan mixto: define la cuantía de la aportación para algunas prestaciones y la cuantía de la prestación para otras, o bien, define simultáneamente los importes de la aportación y prestación.

En la legislación española los planes de sistema empleo o asociado pueden ser de cualquiera de las tres modalidades anteriores, mientras que los planes individuales sólo pueden ser de aportación definida.

Planes de Aportación Definida

Denominando A_1 , A_2 , A_3 ,...., A_t las aportaciones o contribuciones imputables a las anualidades 1,2,...,t, prepagables y correspondientes a un partícipe determinado, G_1 , G_2 , G_3 , ..., G_t los gastos de gestión (gestora, depositario y otros gastos) pospagables, el fondo de capitalización al final de cada año es:

$$F_1 = A_1 (1+i_1) - G_1$$
$$F_2 = A_1 (1+i_1) (1+i_2) + A_2 (1+i_2) - G_1 (1+i_2) - G_2$$
$$F_3 = A_1 (1+i_1) (1+i_2) (1+i_3) + A_2 (1+i_2) (1+i_3) + A_3(1+i_3) - G_1 (1+i_2) (1+i_3) - G_2(1+i_3) - G_3$$

....

$$F_t = \sum_{s=1}^{t} A_s \prod_{h=s}^{t} (1+i_h) - \sum_{s=1}^{t} G_s \prod_{h=s+1}^{t} (1+i_h)$$

i_h = Interés unitario realmente obtenido en el año h

Para t= n (fecha de jubilación del partícipe) resulta

$$F_n = \sum_{s=1}^{n} A_s \prod_{h=s}^{n} (1+i_h) - \sum_{s=1}^{n} G_s \prod_{h=s+1}^{n} (1+i_h)$$

importe que representa el capital de jubilación acumulado en n.
La renta vitalicia anual actuarialmente equivalente, es:

$$F_n = R_{xj} \; \partial_{xj} + K \, R_{xj} \; \partial_{xj\,/yj}$$

donde

X_j = Edad de jubilación del partícipe

K = Fracción de la renta reversible al cónyuge del beneficiario cuya edad es Y_j

$\partial_{xj/yj}$ = Valor actual actuarial de una renta anual unitaria de supervivencia.

Si consideramos las variables aleatorias (rentas unitarias)=

- Z_1 , cuyo espacio numérico es $\{\partial_{t+1:i} ; \ \}$ $\forall$ t = 0,1,2,3,... ω-x_j con t o K_{xj} = número completo de años hasta el fallecimiento de x_j y p[$Z_1 = \partial_{t+1:i}$] = t/q_{xj} $\forall$ t= 0,1,2,3,... ω-x_j

- Z_2 , cuyo espacio numérico es $\{K\, V^t\, \partial_{Yj+t'}\}$ $\forall$ t' = 1,2,3,.... ω- y_j

con probabilidades

$P[\,Z_2 = K\, V^t\, \partial_{Yj+t'}\,] = {}_{t'-1/}q_{xj}\ {}_{t'}p_y \qquad \forall\ t' = 1,2,3,....\ \omega\text{-}\ y_j$

la convolución z = $z_1 + z_2$ expresa el valor actual de la prestación de jubilación reversible al cónyuge, y tiene como principales parámetros los siguientes:

$E(z) = E(z_1) + E(z_2) = \partial_{xj} + K\,\partial_{xj/yj}$

$\sigma^2(z) = \sigma^2(z_1) + \sigma^2(z_2) + 2\,\mathrm{Cov}(z_1\ z_2)$

donde

$$\sigma^2(z_1) = \sum_{t=0}^{\omega-x_j} [\partial_{t+1:i}]^2\ {}_{t/}q_{x_j} - [\partial_{x_j}]^2$$

$$\sigma^2(z_2) = \sum_{t'=1}^{\omega-y_j} [K \cdot V^{t'} \cdot \partial_{y_j+t'}]^2 \, {}_{t'-1/}q_{x_j} \cdot {}_{t'/}p_{y_j} - [K \cdot \partial_{x_j/y_j}]^2$$

$cov(z_1\ z_2) = E(z_1\ z_2) - E(z_1)\ E(z_2) =$

$$= \sum_{t=0}^{\omega-x_j} \sum_{t'=1}^{\omega-y_j} (\partial_{t+1:i})(K \cdot V^{t'} \cdot \partial_{y_j+t'}) \cdot P(z_1 = \partial_{t+1:i}; z_2 = K \cdot V^{t'} \cdot \partial_{y_j+t'}) -$$

$$-(\partial_{x_j})(K \cdot \partial_{x_j/y_j})$$

El Riesgo actuarial de longevidad, o riesgo asociado a las fluctuaciones aleatorias de las prestaciones del Fondo de pensiones con respecto a su esperanza matemática (F_n), se puede medir por el Coeficiente de Variación de Pearson (CV), es decir

$$CV = \frac{\sigma(z)}{E(z)} \cdot 100$$

esto es, la desviación media de la prestación con respecto al Fondo de capitalización constituido, expresada en porcentaje del propio Fondo.

Como medida complementaria, es importante obtener la probabilidad de incurrir en pérdidas debido a la mayor supervivencia del partícipe jubilado o su cónyuge, es decir, si denominamos

$$P\ [\ z \leq E(z)\ ] = \alpha$$

la probabilidad de incurrir en pérdidas es

$$P\ [\ z > F_n\ ] = 1- \alpha$$

Teniendo en cuenta que a partir de una determinada ley financiera (en nuestro caso la ley de descompuesto compuesto) definimos la <u>suma actuarial</u> de nivel α sobre un conjunto de capitales financiero-estocásticos (S ; t ; α) a la cuantía ${}_{\alpha}S_t$ tal que $P[z(t) \leq {}_{\alpha}S_t\ ] = \alpha$

siendo z(t) la variable aleatoria que recoge el valor equivalente en el momento t (t $\in \Re^{+}$) de los capitales que componen en este caso la prestación a favor del beneficiario o su cónyuge, estamos en condiciones de afirmar que el fondo de capitalización $F_n = E(z)$ es la suma actuarial en el tiempo biométrico x_j de nivel α, del conjunto de capitales que constituye la prestación del Plan de pensiones a favor del partícipe considerado.

Finalmente, en caso de fallecimiento o invalidez del partícipe antes de su jubilación, él mismo o sus beneficiarios tendrán derecho a percibir el fondo de capitalización F acumulado hasta esa fecha.

Es decir, en caso de aproximación lineal en la valoración actuarial de la renta si esta es fraccionaria, resulta

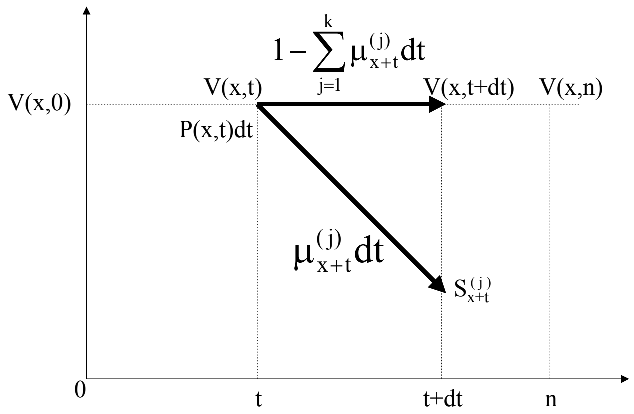
$$F_t = R_y \partial_y^{(m)} = R_y [\partial_y - \frac{m-1}{2m}]$$

y= Edad del beneficiario en t.

El riesgo actuarial de longevidad se obtiene ahora de forma análoga a la que acabamos de exponer en caso de jubilación.

3. PLANES DE PRESTACIÓN DEFINIDA: MODELO ACTUARIAL MULTIDECREMENTAL

En un primer enfoque clásico o determinista, en la figura adjunta aparece la dinámica de la operación en (t, t + dt), t $\in \Re^{+}$,



siendo:

V(x,t) = Fondo acumulado en el momento t.

P(x,t)dt = Aportación pura en (t,t + dt)

$\mu_{x+t}^{(j)}dt$ = Probabilidad de que en (t,t+dt) se presente el suceso que da lugar al pago de capital (fallecimiento, invalidez, salida voluntaria del Plan, etc)

$S_{x+t}^{(j)}$ (j=1,2,....k)

$\delta(t)dt$ = tanto de interés del periodo (t,t,+dt)

$P^{(n}(x,t)dt = \sum_{j=1}^{k} S_{x+t}^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)}dt$ = Aportación natural en (t,t+dt)

La ecuación dinámica será:

$$[V(x,t)+P(x,t)dt](1+\delta(t)dt)=$$
$$= [1-\sum_{j=1}^{k}\mu_{x+t}^{(j)}dt]\cdot V(x,t+dt)+\sum_{j=1}^{k}S_{x+t}^{(j)}\mu_{x+t}^{(j)}dt$$

en donde operando y haciendo que dt→0 se llega a la siguiente ecuación diferencial lineal o Ecuación de Thiele.

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = V(x,t)[\delta(t) + \sum_{j=1}^{k} \mu_{x+t}^{(j)}] + P(x,t) - P^{(n}(x,t) =$$

$$= V(x,t)\,\gamma(x,t) + P(x,t) - P^{(n}(x,t)$$

$\gamma(x,t)$ = tanto de capitalización actuarial multidecremental

La solución particular de esta ecuación diferencial que vamos a considerar es:

$$V(x,t) = \frac{1}{E(x,t)}[V(x,0) + \int_0^t E(x,s)(P(x,s) - P^{(n}(x,s))ds]$$

donde $E(x,t) = e^{-\int_0^t \gamma(x,s)ds}$ es el factor de actualización actuarial y

$\gamma(x,t) = \delta(t) + \sum_{j=1}^{k} \mu_{x+t}^{(j)}$ el tanto actuarial de capitalización asociado al proceso, en el que los sucesos aleatorios j=1,2...k son incompatibles.

Cuando, además, se da la condición de contorno V(x,n) o capital reconocido al partícipe al final de la operación se tiene la siguiente ecuación de equivalencia estática.

$$E(x,n) \cdot V(x,n) = V(x,0) + \int_0^n (P(x,t) - P^{(n}(x,t))E(x,t)dt$$

ecuación que modeliza el planteamiento clásico a aportación constante media.

Desde el punto de vista de los planes de Pensiones, nos interesa contemplar los siguientes casos particulares:

1) Que en caso de fallecimiento, o abandono del Plan por cualquier otra causa antes de llegar a la edad de retiro, el partícipe no tenga derecho a devolución alguna.

En este caso será:

$$V(x,0) = 0$$
$$S_{x+t}^{(j)} = 0 \qquad \forall j = 1,2,\dots$$
$$\gamma(x,t) = \delta(t) + \mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)}$$

donde $\mu_{x+t}^{(1)}dt$ es la probabilidad de cese en el proceso de capitalización debido al fallecimiento del asegurado, y $\mu_{x+t}^{(2)}dt$ la probabilidad de cese debido al abandono del colectivo por cualquier otra causa.

En base a estas condiciones se obtiene la ecuación de equivalencia estática,

$$E(x,n) \cdot V(x,n) = P(x)\int_0^n E(x,t)dt$$

es decir, pasando al campo discreto,

$${}_nE_x^{(\tau)} \cdot V(x,n) = P(x)\partial_{x:n}^{(\tau)}$$

donde V(x,n) es el capital que constituye la prestación a la edad de jubilación (x+n), P(x) la aportación o contribución al Fondo del partícipe, que hemos considerado constante, ${}_nE_x^{(\tau)} = v^n\,{}_np_x^{(\tau)}$, siendo ${}_np_x^{(\tau)}$ la probabilidad de permanencia en el plan a la edad x+n, y finalmente, $\partial_{x+n}^{(\tau)}$ el valor actual de una renta actuarial unitaria anual en la que sus probabilidades son las de que el partícipe permanezca en el plan de pensiones a cada edad.
La contribución anual del citado partícipe será, en este caso,

$$P(x) = \frac{{}_nE_x^{(\tau)}}{\partial_{x:n}^{(\tau)}} \cdot V(x,n)$$

Evidentemente, se cumple que

$$\partial_{x:n}^{(\tau)} \leq \partial_{x:n} \qquad \text{y} \qquad {}_nE_x^{(\tau)} \leq {}_nE_x$$

2) Que en caso de abandono del colectivo por cualquier causa, incluido el fallecimiento, el asegurado, reciba el importe de las reservas constituidas hasta ese fecha con sus aportaciones.

En este caso será,

$$\mathrm{V}(x,0) = 0$$
$$\mathrm{S}_{x+t}^{(j)} = \mathrm{V}(x,t) \qquad \forall j = 1,2,\ldots$$
$$\gamma(x,t) = \delta(t) + \mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)}$$

La aportación natural es $\mathrm{P}^{(n}(x,t)dt = (\mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)})dt \cdot \mathrm{V}(x,t)$

La ecuación diferencial, consecuencia del principio de equivalencia dinámico, tiene la expresión en este caso:

$$\frac{dV(x,t)}{dt} = V(x,t)\gamma(x,t) + P(x,t) - P^{(n}(x,t) = V(x,t)\delta(t) + P(x,t)$$

Cuya solución particular es, a cuota constante:

$$V(x,t) = \frac{1}{E'(x,t)} \cdot P(x)\int_0^t E'(x,t)dt$$

donde $E'(x,t) = e^{-\int_0^t \delta(x,s)ds}$, es decir, el factor de actualización financiero puro. La ecuación de equivalencia estática es

$$V(x,n)\cdot E'(x,n) = P(x)\int_0^n E'(x,t)dt$$

o bien, en el campo discreto

$$V^n \cdot V(x,n) = P(x)\partial_{n:i}$$

donde $\partial_{n:i}$, es la valoración actual de la renta financiera pura.

La aportación o contribución anual constante será en este caso,

$$P(x) = \frac{V^n}{\partial_{n:i}} \cdot V(x,n)$$

donde V(x,n) tiene el mismo significado del caso anterior (capital equivalente a la prestación en la fecha de retiro o jubilación).

De forma análoga, en un enfoque clásico o determinista, a partir de la ecuación dinámica o ecuación de Thiele podemos plantear cualquier otra posibilidad que se contemple en el Reglamento del Plan de pensiones.

Enfoque estocástico

Sea T(x)=T la variable aleatoria de tipo continuo que nos mide el tiempo hasta el cese del proceso de capitalización de un partícipe de edad (x) y J(x)=J la variable aleatoria de naturaleza discreta que recoge las distintas causas de interrupción del citado proceso de capitalización (fallecimiento, invalidez, salida voluntaria del Plan, etc) La función de distribución G(t) y de densidad g(t) de la primera variable son, respectivamente

$$G(t) = P[T \leq t] = {}_{/t}q_x^{(\tau)} = 1 - {}_t p_x^{(\tau)} \qquad ; t \geq 0$$

donde ${}_{/t}q_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{k} {}_{/t}q_x^{(j)}$ es la probabilidad temporal de eliminación por cualquier causa como suma de las probabilidades asociadas a cada una de ellas (los sucesos aleatorios que las definen son incompatibles: fallecimiento, invalidez...)

y $\quad g(t) = {}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)}$

siendo ${}_tp_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)}dt$ la probabilidad de que la cabeza (x) interrumpa la operación entre t y t+dt.

Aquí también se cumple la relación aditiva

$$\mu_{x+t}^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{k} \mu_{x+t}^{(j)}$$

y, en consecuencia

$${}_tp_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \sum_{j=1}^{k} \mu_{x+t}^{(j)} dt}$$

la condición de existencia de g(t) es

$$\int_0^{\infty} {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt = 1$$

Respecto a la segunda variable (causas de eliminación), si denominamos por h(j) su función de cuantía P[J=j] resulta $\sum_{j=1}^{k} h(j) = 1$

Distribución conjunta bivariante

La función de densidad conjunta de ambas variables $f_{T,J}(t;j)$ la podemos definir mediante la expresión

$$f_{T,J}(t;j)\,dt = P[(t < T \leq t + dt),(J = j)] \qquad [1]$$

o probabilidad de interrupción del proceso en el intervalo (t,t+dt) debido a la causa j

Análogamente,

$$\int_0^t f_{T,J}(s;j)ds = P[(0 < T \leq t),(J = j)]$$

expresa la probabilidad de interrupción antes de t por la causa j.

y
$$\sum_{j=1}^{k}\left\{ \int_0^b f_{T,J}(t;j)dt \right\} = P[a < T \leq b]$$

indica la probabilidad de eliminación por cualquier causa entre a y b.

A partir de la probabilidad del producto $P(S_1 \cap S_2) = P(S_1)\ P(S_2 / S_1)$ la expresión [1] se puede formular como probabilidad condicionada.

$$f_{T,J}(t;j)dt = P[T > t]\cdot P[(t < T \leq t + dt) \cap (J = j)|T > t] = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \ \mu_{x+t}^{(j)}dt$$

que equivale a una probabilidad diferida de interrupción del proceso debido a la causa j.

Las sumas o capitales que componen las prestaciones $S_{x+t}^{(j)}$ a favor del partícipe del Plan cuya edad es (x) permiten calcular los distintos parámetros y los distintos percentiles de nivel α, como por ejemplo, la media (E) o valor actual actuarial de la prestación total reconocida al citado partícipe

$$E = \sum_{j=1}^{k}\left\{ \int_0^{\infty} V^t S_{x+t}^{(j)} f_{T,J}(t;j)dt \right\}$$

Distribuciones marginales y condicionadas

A partir de la función de densidad conjunta bivariante $f_{T,J}(t;j)$ se pueden obtener las correspondientes distribuciones marginales y condicionadas.

Así, la función de distribución marginal de la variable T es

$$G(t) = P[T \leq t] = \sum_{j=1}^{k} \left\{ \int_0^t f_{T,J}(t;j)dt \right\} = \sum_{j=1}^{k} {}_{/t}q_x^{(j)} = {}_{/t}q_x^{(\tau)}$$

o probabilidad temporal de interrupción del proceso por cualquier causa.

Su función de densidad marginal queda

$$g(t) = \sum_{j=1}^{k} f_{T,J}(t;j) = f_{T,J}(t;1) + f_{T,J}(t;2) + \cdots + f_{T,J}(t;k)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} {}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)} = {}_t p_x^{(\tau)} \sum_{j=1}^{k} \mu_{x+t}^{(j)} = {}_t p_x^{(\tau)} \cdot \mu_{x+t}^{(\tau)}$$

Respecto a la segunda variable (J) su función de cuantía resulta

$$P[J = j] = h(j) = \int_0^{\infty} f_{T,J}(t;j)dt = {}_{/\infty}q_x^{(j)} = {}_{/\omega-x}q_x^{(j)}$$

que mide la probabilidad de eliminación por causa j (fallecimiento, invalidez, abandono voluntario del Plan de pensiones...) cualquiera que sea la fecha de ocurrencia.

En cuanto a las distribuciones condicionadas, podemos considerar, por ejemplo, la función de densidad condicionada

$$g(t/j) = \frac{f_{T,J}(t;j)}{h(j)} = \frac{{}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}}{P[J = j]} = \frac{{}_t p_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(j)}}{{}_{/\omega-x}q_x^{(j)}}$$

o bien

$$g(t/j)dt = \frac{P[(t < T \leq t + dt), (J = j)]}{P[J = j]}$$

Tomando como variable condicionada (J), podemos poner la función de cuantía

$$h(j/t) = \frac{f_{T,J}(t; j)}{g(t)} = \frac{\mu_{x+t}^{(j)}}{\mu_{x+t}^{(\tau)}} \leq 1$$

Si j refleja la salida del Plan por fallecimiento la función h(j/t) será, en general, creciente con $t \in \Re^+$ y $\lim_{t \to \infty} h(j/t) = 1$.

Por el contrario si j recoge como causa de interrupción la salida voluntaria del Plan de pensiones, la función h(j/t) será, en general, decreciente con t y $\lim_{t \to \infty} h(j/t) = 0$

4. EL RIESGO DE LONGEVIDAD EN LOS PLANES DE PRESTACIÓN DEFINIDA

Considerando exclusivamente la contingencia de jubilación a la edad (x_j) y un modelo de capitalización actuarial ordinario (no multidecremental), en el que el fallecimiento es la única causa de eliminación, vamos a establecer las expresiones analíticas fundamentales.

Subcolectivo de beneficiarios del Plan de pensiones

En este caso las prestaciones de jubilación son rentas actuariales inmediatas, cuyo valor actual unitario a la edad x ($x \geq x_j$) lo vamos a representar por la variable aleatoria:

$$\ddot{z}^{(m)} = \partial^{(m)}_{k_m+\frac{1}{m};i} = \frac{1-\exp[-\delta\cdot(k_m+\frac{1}{m})]}{d^{(m)}}$$

siendo

$$\delta = \log(1+i)$$
$$d^{(m)} = m(1-e^{-\frac{\delta}{m}})$$
$$k_m = \frac{\mathrm{Ent}[m\cdot T(x)]}{m}$$

con Ent [t] = mayor número entero ≤ t. y T(x) = Variable aleatoria continua que mide el tiempo hasta el fallecimiento del beneficiario.

m= Periodo de fraccionamiento de la renta

La Función de Distribución de $\ddot{Z}^{(m)}_x$ es

$$F_x^{(m)}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 1/d^{(m)} \\ {}_{/Km}q_x & \text{si } 0 \leq u < 1/d^{(m)} \\ 0 & \text{si } u < 0 \end{cases} \qquad [2]$$

donde

$$K_m = \frac{1}{m}\mathrm{Ent}[-\frac{m}{\delta}\log(1-ud^{(m)})]$$

Y sus principales parámetros resultan:

-<u>Media</u>

$$E[\ddot{Z}^{(m)}] = \partial_x^{(m)} \approx \partial_x - \frac{m-1}{2m}$$

En la hipótesis de distribución uniforme de los fallecimientos en un intervalo anual podemos obtener una aproximación más precisa de la media, aplicando la fórmula [1]

$$\partial_x^{(m)} \approx \left(\frac{i \cdot d}{i^{(m)} d^{(m)}}\right)\partial_x - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{(m)}}$$

con $i^{(m)} = m(e^{\delta/m} - 1)$

-<u>Desviación típica</u>

$$\sigma[\ddot{Z}^{(m)}] = \sqrt{\mathrm{Var}[\ddot{Z}^{(m)}]} = \frac{1}{d^{(m)}}\sqrt{{}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2}$$

donde podemos aplicar la aproximación

$$A_x^{(m)} \approx \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

y ${}^2A_x^{(m)}$ indica que está calculado con el tanto de capitalización 2δ

-<u>Coeficiente de simetría</u>

$$\gamma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}\right] = \frac{E\left[(\ddot{Z}_x^{(m)} - \partial_x^{(m)})^3\right]}{\left\{\sigma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}\right]\right\}^3} = \frac{M_3(\ddot{Z}_x^{(m)})}{\left\{\sigma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}\right]\right\}^3}$$

Expresión que se puede calcular aplicando la fórmula

$$\gamma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}\right] = \frac{-\left[{}^3A_x^{(m)} - 3({}^2A_x^{(m)})(A_x^{(m)}) + 2(A_x^{(m)})^3\right]}{\left[{}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2\right]^{3/2}}$$

---

[1] Ramsay, C.M. (1993) "Percentile pension cost methods: a new approach to pension valuations" S.O.A. Vol. XLV

Suma actuarial de nivel α

Como hemos definido anteriormente, la suma actuarial de nivel α, que ahora representamos por ${}_{\alpha}\ddot{S}_{x}^{(m)}$, es la cuantía necesaria para asegurar que la renta vitalicia inmediata, prepagable, fraccionaria, unitaria, pagadera al beneficiario de edad (x), se paga en su totalidad con probabilidad α, es decir,

$$P\left[\ddot{Z}_{x}^{(m)} \leq {}_{\alpha}\ddot{S}_{x}^{(m)}\right] = \alpha$$

Teniendo en cuenta [2], la suma actuarial la podemos también definir como

$${}_{\alpha}\ddot{S}_{x}^{(m)} = \partial_{k:i}^{(m)} \qquad \text{si} \quad \alpha = {}_{/k}q_{x} \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{m};\frac{2}{m};\frac{3}{m};\frac{4}{m}\cdots$$

o bien, con carácter más general

$${}_{\alpha}\ddot{S}_{x}^{(m)} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\bar{a}_{t} \qquad \text{con} \quad \alpha = {}_{/t}q_{x} \quad \text{y} \quad t \in \Re^{+}$$

donde $\bar{a}_{t}$ es el valor actual de una renta financiera pura, continua y temporal de duración t.
Como la distribución de $\ddot{Z}_{x}^{(m)}$ es con frecuencia asimétrica negativa ($\gamma[\ddot{Z}_{x}^{(m)}] < 0$), esto implica que en estos casos si fijamos un nivel $\alpha \geq$ 50% la suma actuarial será mayor que el valor actual actuarial de la renta, es decir ${}_{\alpha}\ddot{S}_{x}^{(m)} > \partial_{x}^{(m)}$

Subcolectivo de partícipes del Plan de pensiones

La diferencia con respecto al conjunto de beneficiarios que acabamos de analizar radica en que ahora las prestaciones de jubilación son rentas diferidas en lugar de rentas inmediatas ($x<x_j$).

Es decir, considerando para simplificar, que m=1, el valor actual unitario a la edad (x) se representa por la variable aleatoria

$$\ddot{Z}_x = \begin{cases} 0 & \text{si } k_x = 0,1,2,\ldots h-1 \\ {}_{h/}\partial_{k_x-h+1:i} & \text{si } k_x = h,h+1,h+2,\ldots \omega\text{-x-1} \end{cases}$$

donde

h= x_j -x>0

k_x = variable aleatoria que mide el número de años completos hasta el fallecimiento del partícipe. Es decir k_x = Ent. [T(x)] con Ent .[t] = mayor número entero ≤ t

La función de probabilidad o de cuantía de $\ddot{Z}_x$ es

$$P\left[\ddot{Z}_x = 0\right] = {}_{/h}q_x = \sum_{k=0}^{h-1} {}_{k/}q_x$$

$$P\left[\ddot{Z}_x = {}_{h/}\partial_{k-h+1:i}\right] = {}_{k/}q_x \quad \text{con} \quad k = h, h+1, \cdots, \omega - x - 1$$

Los principales parámetros de esta variable aleatoria son:

-<u>Media</u>

$$E\left[\ddot{Z}_x\right] = \sum_{k=h}^{\omega-x-1} {}_{h/}\partial_{k-h+1:i} \cdot {}_{k/}q_x = {}_{h/}\partial_x = {}_hE_x \partial_{x+h}$$

-<u>Desviación Típica</u>

$$\sigma[\ddot{Z}_x] = \sqrt{Var[\ddot{Z}_x]} = \sqrt{E[\ddot{Z}_x]^2 - \left[{}_{h/}\partial_x\right]^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=h}^{\omega-x-1} \left({}_{h/}\partial_{k-h+1:i} \right)^2 \cdot {}_{k/}q_x - \left[{}_{h/}\partial_x \right]^2}$$

-<u>Coeficiente de simetría</u>

$$\gamma\left[\ddot{Z}_x\right] = \frac{E\left[(\ddot{Z}_x - {}_{h/}\partial_x)\right]^3}{\left\{\sigma\left[\ddot{Z}_x\right]\right\}^3} = \frac{M_3(\ddot{Z}_x)}{\left\{\sigma\left[\ddot{Z}_x\right]\right\}^3}$$

Asimismo, de forma análoga al supuesto de rentas inmediatas, podemos definir la <u>suma actuarial</u> de nivel α, ${}_{\alpha}\ddot{S}_x$, como el capital que verifica que la función de distribución de $\ddot{Z}_x$ en ese punto toma el valor α , es decir $P[\ddot{Z}_x \leq {}_{\alpha}\ddot{S}_x] = \alpha$, por lo que la probabilidad que el valor actual de la renta diferida unitaria prepagable, que estamos considerando como prestación de jubilación a favor del partícipe, sea superior a ${}_{\alpha}\ddot{S}_x$, es igual a 1-α.

<u>Métodos de evaluación o periodificación del coste actuarial del Plan de pensiones de nivel α</u>

Siguiendo el esquema que figura en mi libro "Matemática Actuarial"[2] se trata básicamente de sustituir en la formulación de los distintos métodos de evaluación del coste actuarial las expresiones $\partial_x^{(m)}$ (rentas inmediatas en el subcolectivo de beneficiarios) y ${}_{h/}\partial_x^{(m)}$ (rentas diferidas en el subcolectivo de partícipes) por sus correspondientes sumas actuariales ${}_{\alpha}\ddot{S}_x$ de nivel α , probabilidad previamente fijada.

En consecuencia tenemos:

---

[2] Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, V. (1993) "Matemática Actuarial" Ed. MAPFRE págs 102 y ssg.

1) Método individual de los beneficios acumulados (o prestaciones devengadas)

Sea $K_1^1(x) =$ Prestación anual de jubilación acreditada en el ejercicio, a un partícipe cuya edad actual es x. (Edad de jubilación = 65 años).

El "coste normal" del partícipe (x<65) es:

$$\Pi_x^{(1)} = K_1^1(x)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_x^{(m)}$$

donde ${}_{\alpha}\ddot{S}_x^{(m)}$ es la suma actuarial correspondiente a una renta diferida unitaria h=65-x

El "coste normal" del plan es

$$\sum_{\forall x} \Pi_x^{(1)} = \sum_{\forall x} K_1^1(x)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_x^{(m)}$$

En el segundo año-edad x+1- el coste normal resulta

$$\Pi_{x+1}^{(1)} = K_1^1(x+1)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_{x+1}^{(m)}$$

donde $K_1^1(x+1) =$ Prestación anual de jubilación acreditada en el ejercicio al partícipe cuya edad actual es x+1.

Para un año cualquiera r, el coste normal es

$$\Pi_{x+r-1}^{(1)} = K_1^1(x+r-1)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_{x+r-1}^{(m)}$$

$$\forall r = 1,2,3,...65\text{-}x$$

donde ${}_{\alpha}\ddot{S}_{x+r-1}^{(m)}$ es la suma actuarial asociada a una renta diferida unitaria con h= 65-(x+r-1).

Para definir el "coste adicional o suplementario", sea K_2 (x)= Prestación anual de jubilación por los años de antigüedad en la empresa (o por cualquier otra causa que figure en el reglamento) anteriores a la fecha de efecto del plan de pensiones, a favor de un partícipe cuya edad actual es x.

x_e = Edad de entrada en la empresa del citado partícipe ($x_e \leq x < 65$).

N_x = Número de años de antigüedad; $N_x = x - x_e$

El "coste adicional o suplementario" del partícipe es:

$$\Pi_x^{(2)} = K_2(x)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_x^{(m)}$$

Según el criterio de imputación constante anual resulta:

$$K_2(x) = \frac{R_x}{65 - x_e} N_x \qquad (R_x = \text{Renta total anual de jubilación})$$

El "coste suplementario" del plan al comienzo del mismo, es:

$$C_A(0) = \sum_{\forall x} \Pi_x^{(2)} = \sum_{\forall x} K_2(x)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_x^{(m)}$$

$C_A(0)$ expresa el valor actual de las obligaciones del plan asumidas hasta la fecha, las cuales deben ser amortizadas en el futuro (naturalmente, salvo que el colectivo afiliado aporte unos activos cuya valoración sea igual o mayor que $C_A(0)$).

El pasivo u obligación actuarial (PA) en la fecha de efecto del plan de pensiones tiene por expresión,

$$PA(0) = \sum_{\forall x} K_2(x)\ {}_{\alpha}\ddot{S}_x^{(m)}$$

valor coincidente con

$$\sum_{\forall x} \Pi_x^{(2)}$$

El concepto "pasivo actuarial" equivale al de reserva matemática en los seguros de vida y, de acuerdo con este método, se define como la suma actuarial de nivel α de la renta diferida cuyos términos son las prestaciones acumuladas o devengadas por el plan hasta el instante de su valoración.

Así por ejemplo, al inicio del segundo año de funcionamiento del plan, el pasivo actuarial del partícipe es

$$PA(1) = [K_1^1(x) + K_2(x)]_\alpha \ddot{S}_{x+1}^{(m)}$$

y análogamente se obtendría en años sucesivos.

2) <u>Método individual de los beneficios proyectados basado en la edad actual (x)</u>

El "coste normal" - calculado a aportación única - tiene por expresión

$$C_x(0) = [K_1(x) + K_2(x)]_\alpha \ddot{S}_x^{(m)}$$

donde $K_1(x)$ = Prestación anual de jubilación estipulada por los años futuros de permanencia en el plan (hasta los 65 años).

$R_x = K_1(x) + K_2(x)$ = Renta total anual de jubilación reconocida al partícipe.

${}_\alpha\ddot{S}_x^{(m)}$ = Suma actuarial de nivel α de una renta diferida unitaria con h= 65-x.

Este método -sin coste adicional o suplementario - corresponde a la aplicación del sistema actuarial de capitalización individual plena.

Teniendo en cuenta que solo estamos considerando el caso de contribución o aportación única, el pasivo actuarial se calcula como en el método anterior sustituyendo los términos de la renta diferida por $R_x = K_1(x) + K_2(x)$.

Para el conjunto de partícipes del Plan, el coste normal es $\sum_{\forall x} C_x(0)$, es decir, la suma de los costes individuales.

3)<u>Método individual de los beneficios proyectados basado en la edad de entrada (X_e)</u>

El "coste normal" para un partícipe de edad actual (x), cuya edad de entrada en el colectivo a partir de la cual se comienza a devengar derecho a la prestación de jubilación es X_e ($X > X_e$), se obtiene aplicando la expresión (contribución única).

$$C_{xe}(0) = [K_1(x) + K_2(x)]_\alpha \ddot{S}_{xe}^{(m)} = R_x \; {}_\alpha\ddot{S}_{xe}^{(m)}$$

donde

${}_\alpha\ddot{S}_{xe}^{(m)}$ = Suma actuarial de nivel α correspondiente a una renta unitaria diferida h=65-x_e años.

El "coste normal" total del plan es $\sum C_{xe}(0)$ y el "coste adicional" o suplementario para el partícipe de edad de entrada x_e resulta (al comienzo del plan)

$$C_A(x) = R_x \; {}_\alpha\ddot{S}_x^{(m)} - R_x \; {}_\alpha\ddot{S}_{xe}^{(m)} = R_x \left[{}_\alpha\ddot{S}_x^{(m)} - {}_\alpha\ddot{S}_{xe}^{(m)} \right]$$

El coste adicional o suplementario del conjunto de partícipes es la suma de los costes individuales de cada partícipe. Asimismo, la expresión anterior recoge el pasivo actuarial en t=0 del partícipe considerado.

4) <u>Método Agregado basado en la edad actual (sin coste suplementario)</u>

Sea $\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)$ la variable aleatoria que mide el valor actual de las prestaciones a favor del colectivo de partícipes en su conjunto (rentas diferidas) así como de los beneficiarios del plan de pensiones (rentas inmediatas).

Si, para simplificar las notaciones, consideramos como en los métodos anteriores, que x<65 (es decir, partícipes del plan) la variable $\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)$ es la suma de variables independientes si bien no necesariamente idénticamente distribuidas.

$$\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x) = \sum_{\forall x} \ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)$$

donde

$\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)$ = Variable aleatoria valor actual a la edad (x) de una renta diferida h=65-x, fraccionaria (m), prepagable y cuyos términos anuales son R_x (rentas de jubilación).

Los principales parámetros de $\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)$ son:

- Media

$$E\left[\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)\right] = \sum_{\forall x} E\left[\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)\right] = \sum_{\forall x} {}_{h/}\partial_x^{(m)}\, R_x = \sum_{\forall x} {}_{65-x}E_x\ \partial_{65}^{(m)}\, R_x$$

-Varianza

$$\sigma^2\left[\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)\right] = \sum_{\forall x} \sigma^2\left[\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)\right]$$

-Coeficiente de simetría

$$\gamma\left[\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)\right] = \sum_{\forall x} \left\{ \frac{\sigma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)\right]}{\sigma\left[\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)\right]} \right\}^3 \gamma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)\right]$$

con $\gamma\left[\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)\right]$ = coeficiente de simetría de $\ddot{Z}_x^{(m)}(R_x)$

Aproximación funcional de $\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)$

Si el número de partícipes que integran el Plan de pensiones es suficientemente grande, por el teorema central del límite $\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)$ tendrá un coeficiente de simetría suficientemente pequeño (por ejemplo, menor que 0'30 en valor absoluto), por lo que resulta válida la siguiente aproximación funcional [3] , o fórmula de Haldane Tipo A:

Si x es una variable aleatoria de media μ_x ; desviación típica σ_x y coeficiente de simetría γ_x, entonces se verifica

$$P[x \le x_0] = \phi\left\{[(1 + C\bar{x}_0)^r - \mu(r,C)] / \sigma(r,C)\right\}$$

donde

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0 - \mu_x}{\sigma_x} \,;\; C = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \,;\; r = 1 - \frac{\gamma_x}{3C} \,;$$

$$\mu(r,C) = 1 - \frac{1}{2} r(r-1)[1 - \frac{1}{4}(2-r)(1-3r)C^2]C^2 \,;$$

$$\sigma(r,C) = r \cdot C \sqrt{1 - \frac{1}{2}(1-r)(1-3r)c^2}$$

y $$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Evidentemente si el coeficiente de simetria $\gamma\left[\ddot{Z}_C^{(m)}(R_x)\right] \approx 0$ entonces la aproximación de Haldane Tipo A coincide con la aproximación normal.

---

(3) Pentikaïnen, T. (1987) "Approximate Evaluation of the Distribution of Aggregate Claims" ASTIN BULLETIN

Volviendo al método agregado sin coste adicional o suplementario el "coste normal" a aportación o contribución única se define como

$$CAT_{\alpha}\ (0)= {}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}\ ([K_1(x) + K_2(x)])= {}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}(R_x)$$

donde la suma actuarial colectiva del nivel α ${}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}$ verifica

$$P\,[\ddot{Z}_{C}^{(m)}(R_x) \leq {}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}(R_x)]=\alpha$$

La notación CAT_{α} (0) simboliza el "coste actuarial total " en el origen, de nivel α, correspondiente al colectivo de partícipes del Plan de pensiones.

El pasivo actuarial en t (t>0) lo podemos definir de forma análoga a los casos anteriores, es decir,

$$PA(t) = {}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}(t; R_x)$$

donde ${}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}(t; R_x)$ es la suma actuarial del colectivo en su conjunto valorada en t, o bien

$$P\ [\ \ddot{Z}_{C}^{(m)}(t; R_x) \leq {}_{\alpha}\ddot{S}_{C}^{(m)}(t; R_x)] = \alpha$$

5) Método Agregado con coste adicional o suplementario

En este método la variable aleatoria $\ddot{Z}_{C(xe)}^{(m)}(R_x)$ se define como la suma:

$$\ddot{Z}_{C(xe)}^{(m)}\ (R_x) = \sum_{\forall xe} \ddot{Z}_{xe}^{(m)}(R_x)$$

donde x_e (x_e <x) es lo que hemos llamado anteriormente "edad de entrada" de cada partícipe y $\ddot{Z}_{xe}^{(m)}(R_x)$ el valor actual de una renta diferida h=65- x_e , fraccionaria, prepagable y cuyo importe anual es R_x $=K_1(x) + K_2(x)$

El "coste normal" del Plan resulta

$$CAT_{\alpha(Xe)}\ (0) = {}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{C}\ (X_e\ ; [K_1(x) + K_2(x)]) = {}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{C}\ (X_e\ ; R_x\ )$$

con

$$P\ [\ \ddot{Z}^{(m)}_{C(xe)}(R_x) \leq {}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{C}(X_e\ ; R_x\ )] = \alpha$$

Y el coste adicional o suplementario, se obtiene por diferencia

$${}_{\alpha}C_A\ (0) = {}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{C}(R_x)\ -\ {}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{C}(X_e\ ; R_x\ ) = CAT_{\alpha}\ (0)\ - CAT_{\alpha(Xe)}\ (0)$$

capital que a su vez corresponde al pasivo actuarial del Plan en el origen de acuerdo con este método de periodificación.

En <u>conclusión</u>, a partir de un nivel de riesgo o probabilidad α (por ejemplo α=50%) las fórmulas que acabamos de estudiar nos permiten obtener la aportación o contribución al Plan de pensiones en función del método de evaluación del coste actuarial utilizado.

Sin embargo, teniendo en cuenta que en la práctica se suele emplear el principio de equivalencia basado en el criterio de la esperanza matemática, es decir, la suma actuarial ${}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{x}$ verifica la condición ${}_{\alpha}\ddot{S}^{(m)}_{x} = E\ [\ \ddot{Z}^{(m)}_{x}\ ]$, entonces el parámetro α se obtiene de la ecuación

$$P\ [\ \ddot{Z}^{(m)}_{x}\ \leq E\ (\ \ddot{Z}^{(m)}_{x}\ )] = \alpha$$

resultando en la mayoría de los casos α<50%.

En este caso, el riesgo de longevidad del Plan de pensiones lo podemos medir, además de por el coeficiente de variación

$$CV = \frac{\sigma[\ddot{Z}^{(m)}_{x}]}{\mu[\ddot{Z}^{(m)}_{x}]}\cdot 100$$

por la probabilidad 1-α, probabilidad del suceso asociado a la insuficiencia de la suma actuarial $_{\alpha}\ddot{S}_{x}^{(m)}$ para cubrir el importe de la prestación de jubilación a favor del partícipe considerado.

5. APLICACIONES NUMÉRICAS

Consideremos, en primer lugar, un Plan individual de aportación definida con las siguientes características en la fecha de jubilación del partícipe:

x_j = 65 años (edad del partícipe beneficiario)
y_j = 62 años (edad del cónyuge)
k = 0,6 (fracción de reversibilidad de la renta de jubilación)

Bases técnicas: Tablas actuariales G.K.M. 95 para x_j (se puede justificar su aplicación por el estado de salud de esta persona); G.R.F. 95 para y_j ; tanto de interés técnico i= 0,03 constante anual.

El dominio de la variable aleatoria k_1 (x_j) o número de años completos hasta el fallecimiento de x_j es {0,1,2,3,...,127-65-1} y el de la variable k_2 (y_j) - número de años completos hasta la muerte de y_j - es de {0,1,2,3,...,127-62-1}. Es decir, el número total de pares de valores [k_1 (x_j) ; k_2 (y_j)] es 4.030.

El proceso de cálculo ha consistido en obtener las probabilidades asociadas a cada uno de los citados pares de valores, distinguiendo los casos $k_1 (x_j) \geq k_2 (y_j)$ y $k_1 (x_j) < k_2 (y_j)$, ordenar a continuación los resultados obtenidos a fin de establecer la función de distribución de la variable - z (ver su significado en el epígrafe 2 del presente artículo)- y, finalmente, calcular los principales momentos de dicha variable aleatoria.

Las cifras resultantes son las que se indican a continuación (para una renta anual R_{xj} = 1, prepagable, constante):

$$E(z) = \partial_{65} + 0,6 \ \partial_{65/62} = 17,4773$$

σ^2 (z) = 12,1186
σ (z) = 3,4812

$$CV = \frac{\sigma(z)}{\mu(z)} \cdot 100 = 19{,}92\%$$

El riesgo actuarial de longevidad asociado a este partícipe, medido por el CV, resulta bastante elevado pero hay que tener en cuenta que en la práctica actuarial debemos considerar simultáneamente el conjunto homogéneo de partícipes que han alcanzado la jubilación.

En cuanto a la suma actuarial $_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)}$ tal que $P\,[\,z \leq {}_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)}\,] = \alpha$, algunos valores que podemos considerar representativos de la función de distribución de z son los siguientes:

$_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)} = E(z)$	$\alpha = 46{,}13\%$
$\alpha = 50\%$	$_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)} = 17{,}8902$
$\alpha = 60\%$	$_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)} = 18{,}6841$
$\alpha = 70\%$	$_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)} = 19{,}5218$
$\alpha = 80\%$	$_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)} = 20{,}4458$
$\alpha = 90\%$	$_{\alpha}\ddot{S}_{xj}^{(m)} = 21{,}5651$

Obsérvese que si el Fondo constituido (F_n) coincide con el valor actual actuarial de la renta de jubilación, $F_n = \partial_{65} + 0{,}6\ \partial_{65/62}$, la probabilidad de que el Plan incurra en pérdidas por longevidad es, en este caso, $1- \alpha = 53{,}87\%$.

En segundo lugar, vamos a considerar un Plan de empleo de prestación definida a partir de los siguientes datos demográficos y económicos de un colectivo de empleados o partícipes, en la fecha de efecto del Plan de pensiones.

x (edad)	**l_x (Nº de empleados)**	**W_x (salario medio anual en u.m.)**
20	23	750
25	29	775
30	35	805
33	42	820
35	40	850
37	39	885
40	42	910
42	36	915
45	31	930
48	23	965
50	16	1.010
53	12	1.050
55	10	1.135
58	8	1.220
60	3	1.335
62	4	1.370

La prestación consiste en una renta anual de jubilación, prepagable, constante, vitalicia y cuyo importe es igual al 60 por 100 del salario estimado a la edad de retiro.

<u>Bases técnicas</u>: Tablas actuariales G.R.M. 95; tanto de interés técnico i=0,03 constante anual ; Revalorización media anual de los salarios q= 1,02 (ley geométrica).

Los métodos de evaluación del coste actuarial que hemos calculado son el 2) - Beneficios proyectados basado en la edad actual (capitalización individual plena) y el 4) - Método agregado basado en la edad actual (capitalización colectiva plena).

<u>Método individual de los beneficios proyectados basado en la edad actual</u>

La renta anual de jubilación para cada empleado es:

$$R_x = 0{,}6\ W_x\ q^{65-x} = K_1(x) + K_2(x)$$

La variable aleatoria $\ddot{Z}_x$ tiene por expresión

$$\ddot{Z}_x = \begin{cases} 0 & \text{si } K_x = 0,1,2,3,...,65\text{-x-}1 \\ {}_{65-x/}\partial_{k_x-65+x+1} & \text{si } K_x = 65\text{-x};...;127\text{-x-}1 \end{cases}$$

y su función de cuantía es

$$p[\ \ddot{Z}_x = 0\ ] = {}_{/65-x}q_x$$

$$p[\ \ddot{Z}_x = {}_{65-x/}\partial_{k-64+x}] = {}_{k/}q_x \qquad \forall\ k = 65\text{-x};...;127\text{-x-}1$$

La esperanza matemática de Z_x resulta

$$E[\ddot{Z}_x] = \sum_{k=65-x}^{126-x} \left\{ \frac{(1+i)^{-(65+x)}(1+i)[1-(1+i)^{(-k+64-x)}]}{i} \right\} {}_{k/}q_x$$

Por ejemplo, para los empleados más jóvenes (x=20), el valor medio unitario es $E[\ddot{Z}_{20}] = 3{,}3293$

En <u>Apéndice</u> a este artículo figuran las esperanzas matemáticas de $\ddot{Z}_x$ para todas las edades comprendidas entre 20 y 62 años inclusive.

La desviación típica de la citada variable aleatoria en x=20, efectuados los correspondientes cálculos, es igual a 2,0381, es decir:

$$\sigma^2\ [\ \ddot{Z}_{20}\ ] = 4{,}1537$$

$$\sigma\ [\ \ddot{Z}_{20}\ ] = 2{,}0381$$

por lo que el CV a la citada edad queda

$$CV\ (20) = 61{,}22\%$$

La justificación de una cifra tan elevada se debe a que se refiere a un solo partícipe y con una edad muy alejada de la jubilación.

Respecto a la expresión del riesgo de longevidad por la probabilidad de incurrir en pérdidas, resulta

$$P\ [\ \ddot{Z}_{20} > E(\ddot{Z}_{20})\ ] = 0{,}553 > 0{,}50$$

Vamos a considerar a continuación tres supuestos en la estimación del coste normal del Plan de pensiones que hemos tomado como ejemplo:

a) Criterio de la esperanza matemática o principio de equivalencia actuarial clásico. Es decir $_{\alpha}\ddot{S}_x = E(\ddot{Z}_x)$.

b) Criterio de la suma actuarial de nivel $\alpha = 50\%$, Es decir

$$_{0,5}\ddot{S}_x \Rightarrow P\ [\ \ddot{Z}_x \leq {}_{0,5}\ddot{S}_x\ ] = 0{,}50$$

Este criterio parece muy razonable pero tiene el inconveniente en la práctica actuarial que, en general, $_{0,5}\ddot{S}_x$ es mayor que $E(\ddot{Z}_x)$, debido a la asimetría negativa de la distribución de $\ddot{Z}_x$.

c) Criterio de la suma actuarial de nivel $\alpha = 60\%$. Esto es

$$_{0,6}\ddot{S}_x \Rightarrow P\ [\ \ddot{Z}_x \leq {}_{0,6}\ddot{S}_x\ ] = 0{,}60$$

Las operaciones correspondientes nos dan los siguientes resultados para los tres supuestos considerados:

a) Coste normal total

$$\sum_{x=20}^{64} C_x(0) l_x = \sum_{x=20}^{64} 0{,}6 W_x (1{,}02)^{65-x} E(\ddot{Z}_x) l_x = 2{,}158730 \text{ u.m.}$$

Para algunas edades tenemos como coste normal:

x=20 $= C_x\ (0)\ l_x = 0{,}6\ 750\ (1{,}02)^{45}\ (3{,}3293)\ 23 = 84.004$ u.m.
x=40 $= C_x\ (0)\ l_x = 0{,}6\ 910\ (1{,}02)^{25}\ (6{,}1816)\ 42 = 232.566$ u.m.
x=50 $= C_x\ (0)\ l_x = 0{,}6\ 1010\ (1{,}02)^{15}\ (8{,}5356)\ 16 = 111.386$ u.m.
x=62 $= C_x\ (0)\ l_x = 0{,}6\ 1370\ (1{,}02)^{3}\ (13{,}2067)\ 4 = 46.082$ u.m.

b) Coste normal total ($\alpha = 50\%$)

$$\sum_{x=20}^{64} {}_{0,5}C_x(0)\,l_x = \sum_{x=20}^{64} 0{,}6W_x(1{,}02)^{65-x}\,({}_{0,5}\ddot{S}_x)\,l_x = 2{,}341403\ \text{u.m.}$$

El cociente $\dfrac{{}_{0,5}C_x(0)}{C_x(0)} > 1$, que podemos interpretar como un recargo técnico o de seguridad sobre la aportación pura, varía en función de la edad entre un 3,5% y un 10%, aproximadamente.

c) Coste normal total ($\alpha = 60\%$)

$$\sum_{x=20}^{64} {}_{0,6}C_x(0)\,l_x = \sum_{x=20}^{64} 0{,}6W_x(1{,}02)^{65-x}\,({}_{0,6}\ddot{S}_x)\,l_x = 2{,}639848\ \text{u.m.}$$

En este caso, el cociente $\dfrac{{}_{0,6}C_x(0)}{C_x(0)}$ toma valores comprendidos entre el 11% y el 15%, aproximadamente.

Las cifras anteriores recogen las aportaciones o contribuciones únicas al Plan de Pensiones. Para obtener las aportaciones periódicas podemos aplicar el criterio clásico de la esperanza matemática, como parece lógico, o bien, como alternativa, el criterio de nivel α en la variable aleatoria asociada al valor actual de las contribuciones de cada partícipe considerado, siendo α= 50% ó 60% (casos b) y c), respectivamente).

Método Agregado basado en la edad actual (sin coste suplementario)

Para simplificar los cálculos hemos aplicado directamente el modelo normal en la distribución de la variable agregada $\ddot{Z}_C(R_x) = \sum_{x=20}^{64} \ddot{Z}_x(R_x) l_x$, en lugar de obtener una aproximación funcional de la prestación agregada del colectivo de partícipes del Plan de pensiones considerado (fórmula de Haldane Tipo A - ver epígrafe anterior- Normal Power, etc.).

En consecuencia, los parámetros que definen $\ddot{Z}_x \ (R_x)$ son:

$$E\,[\ddot{Z}_C(R_x)\,] = \sum_{x=20}^{64} E[\ddot{Z}_x(R_x)] l_x = \sum_{x=20}^{64} 0{,}6 W_x (1{,}02)^{65-x} E(\ddot{Z}_x) l_x$$

$$= 2{,}158730 \text{ u.m.}$$

$$\sigma^2\,[\ddot{Z}_C(R_x)\,] = \sum_{x=20}^{64} \sigma^2[\ddot{Z}_x(R_x)] l_x =$$

$$\sum_{x=20}^{64} 0{,}36 (W_x)^2 ((1{,}02)^{65-x})^2 \sigma^2(\ddot{Z}_x) l_x$$

$$\sigma\,[\ddot{Z}_C(R_x)\,)] = \sqrt{\sigma^2 \left[\ddot{Z}_C(R_x)\right]} = 63.217{,}3 \text{ u.m.}$$

Teniendo en cuenta que $\ddot{Z}_C(R_x) \equiv N\,[\,2{,}158730\,;\,63.217{,}3\,]$ los principales percentiles de dicha variable aleatoria son:

$\alpha = 50\%$ $\quad {}_{0,5}\ddot{S}_C\ (R_x\ ) = E\ [Z_c\ (R_x)] = 2{,}158730$ u.m.

$\alpha = 60\%$ $\quad {}_{0,6}\ddot{S}_C\ (R_x\ ) = 2{,}174746$ u.m.

$\alpha = 70\%$ $\quad {}_{0,7}\ddot{S}_C\ (R_x\ ) = 2{,}191881$ u.m.

$\alpha = 80\%$ $\quad {}_{0,8}\ddot{S}_C\ (R_x\ ) = 2{,}211935$ u.m.

$\alpha = 90\%$ $\quad {}_{0,9}\ddot{S}_C\ (R_x\ ) = 2{,}239746$ u.m.

El CV colectivo, en este ejemplo, es CV = 2,93 por 100.

En la práctica actuarial parece razonable tomar un valor α>50% en una distribución agregada, por ejemplo, α=60%.

En este caso, el recargo técnico o de seguridad supondría solo el 0,74% de la aportación única pura calculada con el criterio de la esperanza matemática. Para un α=70% el recargo técnico supone el 1,54 por 100 sobre la cuota pura.

CONCLUSIÓN

A partir del principio de equivalencia actuarial, que establece la igualdad entre las aportaciones al Plan y el valor actual actuarial de las prestaciones, el riesgo de longevidad se puede expresar por el coeficiente de variación así como por la probabilidad del Plan de pensiones de incurrir en pérdidas (1-α). En el cálculo de las cuotas o aportaciones de los partícipes parece razonable establecer un nivel $\alpha \geq$ 50%, si bien surge el inconveniente en la práctica actuarial de que, en general, se produce un encarecimiento inicial en el coste del Plan respecto a la aplicación del criterio de la esperanza matemática. Este incremento tiene el significado actuarial de recargo técnico o de seguridad sobre la aportación pura.

Finalmente, en el tratamiento de los partícipes y beneficiarios del Plan de pensiones de forma conjunta, se presenta el problema de aproximación funcional de la función de distribución del valor actual de la prestación a cargo del Plan. El modelo normal; la fórmula de Haldane Tipo A; la aproximación Normal Power; la Gamma de 2 ó 3 parámetros, etc. son posibles soluciones a este problema, típico por otra parte, en la Matemática de los seguros No Vida.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bowers, N.L. y otros (1997) "Actuarial Mathematics". The Society of Actuaries.
[2] Gil Fama, J.A.; Heras Martínez, A. y Vilar Zanón, J.L. (1999) "Matemática de los seguros de Vida." Fundación Mapfre Estudios.
[3] Pentikaïnen, T. (1987) "Approximate Evaluation of the distribution of Aggregate claims" ASTIN BULLETIN.
[4] Ramsay, C.M. (1993) "Percentile pension cost methods: a new approach to pension valuation" S.O.A. Volumen XLV.
[5] Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, V. (1993) "Matemática Actuarial" . Fundación Mapfre Estudios.
[6] Vegas Asensio, J. (1982) "Los Fondos de pensiones privados" Instituto de Actuarios Españoles.

APÉNDICE

Esperanzas matemáticas de la variable Zx   X = 20, ..., 62

20,3.3293	42,6.5834
21,3.4336	43,6.7954
22,3.5412	44,7.0154
23,3.6522	45,7.2439
24,3.7666	46,7.4814
25,3.8847	47,7.7285
26,4.0064	48,7.9861
27,4.1320	49,8.2549
28,4.2615	50,8.5356
29,4.3951	51,8.8289
30,4.5328	52,9.1356
31,4.6749	53,9.4565
32,4.8215	54,9.7927
33,4.9728	55,10.1454
34,5.1289	56,10.5157
35,5.2902	57,10.9051
36,5.4568	58,11.3154
37,5.6289	59,11.7484
38,5.8069	60,12.2063
39,5.9910	61,12.6914
40,6.1816	62,13.2067
41,6.3789	