ESTIMACIÓN DE LA PROVISIÓN DE ESTABILIZACIÓN Y DEL RECARGO TÉCNICO SOBRE PRIMAS A PARTIR DEL AJUSTE DE UNA DISTRIBUCIÓN DE POISSON COMPUESTA PARA EL NÚMERO DE SINIESTROS[1]

Dr. Jose Luis Vilar Zanón y Dr. Jesús Vegas Asensio
Profesor de Matemática Actuarial
Departamento de Economía Financiera y Actuarial
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

Partiendo de los datos anuales de una cartera de responsabilidad civil autos, se procede al ajuste de una Poisson Pascal generalizada al número de siniestros, y a la modelización de la reserva de estabilización mediante un proceso en tiempo discreto. Posteriormente se calcula la probabilidad de supervivencia de esta modalidad de seguro bajo horizonte finito de tres años, con el fin de determinar valores óptimos para la reserva o provisión de estabilización y el recargo de seguridad.

PALABRAS CLAVE: Distribuciones de Poisson compuestas, distribución de Poisson Pascal generalizada, Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, reserva de estabilización, recargo técnico sobre primas, aproximación normal, Teoría del Riesgo.

1. INTRODUCCIÓN

El artículo 45 del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados establece que la provisión de estabilización

[1] Trabajo realizado bajo la financiación de la Dirección General de Enseñanza Superior, Ministerio de Educación y Cultura, proyecto PB96-0099.

"...que tendrá carácter acumulativo, tiene como finalidad alcanzar la estabilidad técnica de cada ramo o riesgo. Se calculará y dotará en aquellos riesgos que por su carácter especial, nivel de incertidumbre o falta de experiencia así lo requieran, y se integrará por el importe necesario para hacer frente a las desviaciones aleatorias desfavorables de la siniestralidad".

Esta provisión deberá dotarse

"... en cada ejercicio por el importe del recargo de seguridad incluido en las primas devengadas con el límite mínimo previsto en las bases técnicas. Salvo en el seguro de crédito, para los supuestos enumerados del citado artículo, el límite mínimo no podrá ser inferior al 2% de la prima comercial.

En el caso del seguro de crédito, la dotación mínima se realizará por el 75% del resultado técnico del ramo, entendiendo por tal la diferencia entre los ingresos y gastos técnicos, tal y como se establece en el Plan de Contabilidad de las Entidades Aseguradoras."

El cálculo de las magnitudes

"... referidas a la propia retención incluirá las operaciones correspondientes a seguro directo y reaseguro aceptado netas de reaseguro cedido y retrocedido.

La provisión deberá aplicarse a compensar el exceso de siniestralidad que se produzca en el ejercicio sobre las primas de riesgo de propia retención que correspondan al ejercicio en el ramo o riesgo de que se trate.

La dotación y aplicación de la provisión de estabilización se realizará por ramos o riesgos, sin que sea admisible la compensación entre los mismos."

Por otra parte el artículo 77, apartado 1.c) del citado reglamento dice que el recargo de seguridad se destinará

"... a cubrir las desviaciones aleatorias desfavorables de la siniestralidad esperada, y deberá calcularse sobre la prima pura. Se determinará, de acuerdo con las características de la información estadística utilizada, atendiendo al tipo, composición y tamaño de la cartera, al patrimonio propio no comprometido y al volumen de cesiones al reaseguro, así como al periodo que se haya considerado para el planteamiento de la solvencia, que no podrá ser inferior a tres años, debiendo especificarse la probabilidad de insolvencia que, en relación con dicho periodo, se haya tenido en cuenta."

En el modelo actuarial que figura a continuación, las magnitudes consideradas son netas de reaseguro, es decir, no se recoge de forma explícita el volumen de cesiones al reaseguro. Los valores numéricos del recargo de seguridad no incluyen componente por error de muestreo.

Partiendo de unos datos empíricos para el número de siniestros y el coste individual para una cartera de pólizas de Responsabilidad Civil del automóvil, los objetivos del presente trabajo consisten en mostrar de qué forma es posible ajustar las distribuciones básicas (número de siniestros y coste individual de los siniestros) relativas a una póliza. En segundo lugar obtener las distribuciones básicas para toda la cartera, y estudiar las características de la distribución del daño total de toda la cartera para un año. Finalmente calcular estimaciones del recargo técnico sobre primas y de la provisión de estabilización inicial, mediante un criterio de probabilidad de ruina o insolvencia con horizonte temporal de tres años. Dicho criterio se aplica sobre la base de un modelo en tiempo discreto (anual) para la evolución de las reservas.

2. AJUSTE DE LAS DISTRIBUCIONES BÁSICAS

Uno de los pasos críticos en el análisis del riesgo actuarial en seguros no vida, es el del ajuste de las distribuciones básicas que cuantifiquen adecuadamente la siniestralidad, ya sea esta referida a una póliza o a toda la cartera. Para ello se procede al ajuste sucesivo de las distribuciones del número de siniestros N y de la cuantía individual X

de los siniestros, para a continuación definir la distribución compuesta del año total *S*.

Este paso es de vital importancia, ya que la validez de cualquier análisis posterior, ya sea este orientado hacia la tarificación (por ejemplo construcción de un sistema de bonus-malus [*Lemaire (1995)]* o hacia la solvencia del negocio (por ejemplo hacia el análisis de la reserva de estabilización), depende de que el modelo ajustado describa adecuadamente los riesgos asegurados.

Desde el punto de vista práctico, un buen ajuste a los datos del número de siniestros es de vital importancia, ya que las propiedades de los modelos probabilísticos para la variable aleatoria *S* así como los desarrollos de los análisis de solvencia o tarificación dependen en gran medida del tipo de distribución del número de siniestros con la que se esté trabajando.

Traducido en términos de la prueba de bondad del ajuste de X^2 la dificultad en el ajuste consiste en que frecuentemente es muy difícil encontrar una distribución de probabilidad que proporcione un p-valor suficientemente alto como para no rechazar el modelo propuesto.

A la hora del ajuste conviene pues contar con un arsenal lo más numeroso posible de distribuciones que nos permita afrontar este problema con una mínima garantía de éxito.

Desde este último punto de vista, una familia de distribuciones para el número de siniestros que puede resultar extremadamente útil, es la de las distribuciones de Poisson compuestas.

2.1 DISTRIBUCIONES DE POISSON COMPUESTAS PARA EL NÚMERO DE SINIESTROS

Estas distribuciones se encuentran analizadas en detalle en *[Panjer & Willmot (1992, capítulos 6 y 7)]*, de manera que solo mencionaremos los aspectos que serán utilizados a lo largo del desarrollo práctico realizado en los epígrafes 2.2. y 2.3.

Llamando N a la variable aleatoria *número de siniestros para un periodo de tiempo dado,* podemos representarla como una variable aleatoria compuesta

$$N = M_1 + M_2 + \ldots + M_R \qquad (1)$$

siendo M, R dos variables aleatorias discretas con soporte incluido en $\{0,1,2,...\}$. Si llamásemos R al número de accidentes producidos durante un periodo, y M al número de siniestros producidos en cada accidente, podríamos llegar a una interpretación práctica del modelo planteado en (1). Sin embargo debemos indicar que, *desde el punto de vista del ajuste, toda interpretación de un modelo es hasta cierto punto accesoria, ya que lo más relevante es hallar un modelo que proporcione un p-valor suficientemente alto como para no poder rechazar la hipótesis nula.* Solo después de encontrar dicho modelo probabilístico sería procedente la búsqueda de alguna interpretación actuarial.

Volviendo a (1), es claro que existirán tantas distribuciones candidatas como posibles elecciones podamos realizar para las distribuciones de las variables aleatorias primaria R y secundaria M. Tomando como distribución primaria una distribución de Poisson y dejando libre la elección de la secundaria, nos situamos dentro de la clase de las *distribuciones de Poisson compuestas* para el número de siniestros N.

Dentro de esta clase encontramos modelos biparamétricos y triparamétricos que pueden, dada la variación de sus características (media, varianza, asimetría), llegar a proporcionar unas frecuencias teóricas adecuadas desde el punto de vista del ajuste. Otra razón para la utilización de estas distribuciones es su facilidad de manejo *[Panjer & Willmot (1992, p.255)]*. Antes de enumerar estos modelos expondremos algunas de estas características comunes que serán utilizadas en alguna fase del desarrollo de nuestro trabajo, particularmente a lo largo de los epígrafes 2.2, 2.3, y 3.

Tomando para la primaria una distribución de Poisson, las transformadas de la variable aleatoria compuesta son:

- Función generatriz de probabilidad (fgp). Llamando P_1, P_2 a las fgp de la variable primaria y secundaria:

$$P_N(Z) = P_1(P_2(z)) = e^{\lambda[P_2(z)-1]} \tag{2}$$

- Función generatriz de momentos (fgm). Llamando P_1, a la fgp de la variable primaria y M_2 a la fgm de la variable secundaria:

$$M_N(z) = P_1(M_2(z)) = e^{\lambda[M_2(z)-1]} \tag{3}$$

Estas dos expresiones serán las que nos permitan calcular mediante derivación las características de las variables aleatorias N (número de siniestros anual en toda la cartera), N_i (número de siniestros anual en la póliza i). Por otro lado una propiedad muy útil de las distribuciones de Poisson compuestas es que *forman una familia cerrada por convolución.* Por tanto, disponiendo de la distribución de N_i relativa a una póliza i, y asumiendo la independencia entre las variables N_i, podemos pasar al modelo de una póliza al de toda la cartera escribiendo (llamando n al número total de pólizas de la cartera)

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

sabiendo de entrada que la distribución de N será una Poisson compuesta cuyo parámetro de Poisson es $n\lambda$.

Los modelos pertenecientes a esta clase son enumerados a continuación *[Panjer & Willmot (1992, capítulo 7)].* Sólo detallamos las características de la distribución Poisson-Pascal generalizada ya que será la que usaremos más adelante. El cálculo de los momentos de estas distribuciones, así como de sus transformadas se realiza siguiendo las formulaciones habituales de las distribuciones compuestas.

1. **Distribución Poisson-binomial**: Tomando como secundaria una secundaria binomial B(m,q), se obtiene una distribución cuyas características esenciales son las siguientes:

• Media y varianza:

$$\mu = m\lambda q, \;\; \sigma^2 = \mu(1+(m-1)q)$$

• Asimetría en función de la media y la varianza:

$$\gamma = (\sigma^2)^{-3/2}\left(3\sigma^2 - 2\mu + \frac{m-2}{m-1}\frac{(\sigma^2-\mu)^2}{\mu}\right) \tag{4}$$

Se observa que al ser $0<\frac{m-2}{m-1}<1$(m = 2,3,...), para una media y varianza dadas el coeficiente de asimetría tiene un rango muy reducido. De hecho se puede escribir la siguiente cota superior

Para γ

$$\gamma < \left(\sigma^2\right)^{-3/2}\left(3\sigma^2 - 2\mu + \frac{\left(\sigma^2-\mu\right)^2}{\mu}\right) \tag{5}$$

2. Distribución Neyman Tipo A: Resulta de la elección de una Poisson como distribución secundaria. Llamando λ_1,λ_2 a los parámetros de la primaria y secundaria respectivamente:

• Media varianza:

$$\mu = \lambda_1\lambda_2, \qquad \sigma^2 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)$$

• Asimetría en función de la media y la varianza:

$$\gamma = \left(\sigma^2\right)^{-3/2}\left(3\sigma^2 - 2\mu + \frac{\left(\sigma^2-\mu\right)^2}{\mu}\right) \tag{6}$$

Por tanto para una media y varianza dadas, la asimetría en este caso siempre será mayor que en el de la Poisson-binomial.

3. Distribución Poisson-Pascal: Se trata de una familia de distribuciones, ya que esta denominación se refiere al caso en que la secundaria pertenece a la clase formada por las distribuciones binomial negativa ($BN(r,\beta), r>0, \beta>0$), logarítmica ($l(\beta), r=0, \beta>0$) o binomial negativa extendida y truncada ($BNET(r, \beta), r \in (-1,0), \beta>0$). Nos referimos especialmente a este último caso por tratarse de la distribución que proporcionará el mejor ajuste a nuestros datos (véase el epígrafe 2.2.). Cuando la secundaria es una distribución bnet, la poisson compuesta se denomina *Poisson -Pascal generalizada.* El lector interesado en un estudio en profundidad de la bnet puede hallarlo en *[Panjer & Willmot (1992, p. 260)].* El cálculo de las cuantías $\{q_n : n=1,2,3,...\}$ de la $BNET(r,\beta)$ puede realizarse mediante la siguiente recursión:

$$q_1 = \frac{r}{(1+\beta)^r - 1} \frac{\beta}{1+\beta}$$

$$q_n = \frac{n+r-1}{n} \frac{\beta}{1+\beta} q_{n-1}, \qquad n=2,3,...$$

Las q_n, junto a las cuantías de la primaria Poisson se introducen en el algoritmo recursivo de Panjer *[Panjer & Willmot (1992, p. 197, Corolario 6.6.1)]* para obtener así las cuantías de la Poisson-Pascal generalizada. Recordemos que la cuantía en n=0 de la compuesta es igual a $e^{-\lambda}$, es decir a la probabilidad de que la variable aleatoria primaria se realice en 0. En cuanto a las características de esta distribución compuesta se tiene lo siguiente *[Panjer & Willmot (1992, pp. 259, 261)]*:

- Función generatriz de probabilidad:

$$P(z) = \exp\left\{\lambda\left[\frac{\left[1-\beta(z-1)\right]^{-r} + (1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}} - 1\right]\right\}, \qquad r \in (-1,0), \lambda, \beta > 0 \qquad \textbf{(7)}$$

- Media y varianza:

$$\mu = \lambda(1-(1+\beta)^{-r})^{-1} r\beta, \qquad \sigma^2 = \mu(1+(r+1)\beta) \qquad \textbf{(8)}$$

- Asimetría en función de la media y la varianza:

$$\gamma = (\sigma^2)^{-3/2}\left(3\sigma^2 - 2\mu + \frac{r+2}{r+1}\frac{(\sigma^2-\mu)^2}{\mu}\right) \qquad \textbf{(9)}$$

Observemos que la función $f(r) = \frac{r+2}{r+1}$ $(r > -1)$ tiene una asíntota vertical en -1 y es decreciente cuando $r \to +\infty$, pasando así a ser una binomial negativa). Esto significa que para una media y varianza dadas, podemos disponer de una Poisson-Pascal generalizada con asimetría tan grande como queramos (caso en que $r \to -1$. *Por tanto este modelo triparamétrico del número de siniestros puede resultar particularmente adecuado para el ajuste a datos con una asimetría muy grande.* Volviendo al resto de las distribuciones reagrupadas bajo la denominación Poisson-Pascal, podemos decir que para una media y varianza dadas la asimetría va creciendo a medida que consideramos como secundaria una binomial negativa, una logarítmica y finalmente una bnet. En particular, es bien sabido que cuando la secundaria es logarítmica la compuesta es una binomial negativa, y al ser en este caso r=0 resulta que (9) se escribe

$$\gamma = (\sigma^2)^{-3/2}\left(3\sigma^2 - 2\mu + 2\frac{(\sigma^2-\mu)^2}{\mu}\right) \qquad \textbf{(10)}$$

Finalmente según (6) y (9), para una media y varianza fijas la asimetría de cualquier Poisson-Pascal estará acotada inferiormente por la Neyman Tipo A. Estas observaciones serán sumamente útiles a la hora de proceder a la elección de una candidata para el ajuste de la distribución del número de siniestros de una póliza.

2.2 ESTIMACIÓN Y AJUSTE A LOS DATOS

Consideremos los siguientes datos de número de siniestros en una cartera de responsabilidad civil autos para un total de 280162 pólizas observadas durante un año:

Nº Siniestros	*Nº Pólizas*
0	223814
1	46878
2	7681
3	1392
≥ 4	397
Total:	280162

(11)

Los momentos centrados en el origen (m_i^*), varianza (σ^{*2}) y asimetría (γ^*) muestrales son

$$\begin{aligned} \mu^* = m_1^* &= .2427309914 \\ m_2^* &:= .3443793234 \\ m_3^* &:= .3893242137 \\ \sigma^{*2} &:= .2854609892 \\ \gamma^* &:= 2.552649963 \end{aligned} \qquad (12)$$

Obsérvese la muy alta asimetría muestral. Para encontrar una distribución candidata dentro de la familia Poisson compuesta, vamos a sustituir los valores obtenidos (12) en la ecuación

$$\gamma^* = \left(\sigma^{*2}\right)^{-3/2}\left(3\sigma^{*2} - 2\mu^* + C\frac{\left(\sigma^{*2} - \mu^*\right)^2}{\mu^*}\right)$$

para a continuación despejar el valor C que relaciona a los $\mu^*, \sigma^{*2}, \gamma^*$. Obtenemos así el siguiente valor

$$-.120662933 + .04931969266\ C = 0 \Leftrightarrow C = 2.446546734$$

El hecho de ser C>2 indica de entrada que la binomial negativa (Poisson compuesta con una logarítmica) no será una buena candidata para el ajuste, ya que esta sólo podría ser propuesta para el caso en que hubiésemos obtenido $C \simeq 2$ (véase (10)). Además, también nos indica que la candidata debe ser una Poisson-Pascal generalizada, es decir, una Poisson compuesta con una *BNET*(r, β).

Por tanto, haciendo $C=\frac{r+2}{r+1}$ podemos volver a plantear la anterior ecuación con el fin de despejar esta vez el estimador por momentos $\hat{r}$ del parámetro $r \in (-1,0)$:

$$-.120662933+.049319692\,66\frac{\hat{r}+2}{\hat{r}+1}=0 \Leftrightarrow \hat{r}=-.3086984496 \quad (13)$$

A continuación, sustituyendo $\hat{r}$ en (8), despejamos el estimador por momentos $\hat{\beta}$:

$$-.0427299978+.1678003107\hat{\beta}=0 \Leftrightarrow \hat{\beta}=.2546479063 \quad (14)$$

Concluimos por tanto que nuestra candidata para distribución secundaria es una *BNET* ($\hat{r},\hat{\beta}$).

Obsérvese que por el hecho de ser $\hat{r} \neq -\frac{1}{2}$, el ajuste de una distribución de Poisson ponderada por una inversa gaussiana no parece ser tampoco una elección adecuada. En efecto, sabido es que cuando $r=-\frac{1}{2}$ la Poisson Pascal generalizada es de hecho una distribución de Poisson ponderada cuya función de estructura es una inversa gaussiana. Las observaciones relativas a la no-adecuación tanto de este modelo como de la binomial negativa (que es otra distribución de Poisson ponderada esta vez por una gamma), resultaron ser acertadas ya que en estos dos casos la prueba de bondad del ajuste de la X^2 a los valores empíricos proporcionó p-valores mulos.

Para completar esta primera etapa sólo nos resta ya estimar por momentos el parámetro de Poisson de la primaria, para lo cual hacemos uso de (8), sustituyendo en la expresión de la media los valores obtenidos hasta ahora y despejando el estimador $\hat{\lambda}$:

$$1.083668068\hat{\lambda} - .2427309914 = 0 \Leftrightarrow \hat{\lambda} = .2239901669 \qquad (15)$$

En conclusión, ya podemos proceder al ajuste de una Poisson Pascal generalizada consistente en una P($\hat{\lambda}$ = .2239901669) *compuesta con una BNET(* $\hat{r}$ = -.3086984496, $\hat{\beta}$ = .2546479063).

Para esta tarea debemos ser capaces de calcular las frecuencias teóricas proporcionadas por el modelo, es decir, las cuantías de una distribución compuesta cuya secundaria es aritmética (puesto que su soporte es el conjunto {1,2,3,…}) y que no tiene átomo en el origen (vuélvase a mirar el soporte de la secundaria). Como ya se indicó más arriba *[Panjer & Willmot (1992, p. 197, Corolario 6.6.1)]* es el resultado adecuado para la resolución de este problema. Su codificación y posterior ejecución en un ordenador personal no presentan ningún problema si se sabe resolver el problema de la lentitud del algorítmico recursivo.

Las frecuencias teóricas que resultan son las siguientes:

Nº Siniestros	*Frecuencias Observadas*	*Frecuencias Teóricas*
0	223814	223868.2920
1	46878	46725.16098
2	7681	7792.922349
3	1392	1401.947280
≥4	397	373.6773580

Así las cosas, el estadístico de Pearson y el p-valor son iguales a

P=3.646776115, $\quad$ *p valor* = .0561778544

No olvidemos que el p-valor se calcula mediante una distribución X^2 con un grado de libertad, puesto que existen 5 clases teóricas conteniendo más de 4 casos y los parámetros ajustados han sido tres: λ, r, β.

Nuestra conclusión final es que al haber obtenido un p-valor mayor que el 5% no podemos rechazar el modelo propuesto. Recordemos que este último ha sido ajustado a la variable aleatoria *número de siniestros de una póliza cualquiera de la cartera durante un año.*

2.3 DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO DE SINIESTROS PARA TODA LA CARTERA EN UN AÑO

Disponiendo ya de la distribución del número de siniestros N_i para una póliza cualquiera en una año, es fácil obtener la distribución del *número de siniestros* $N=\sum_{i=1}^{n} N_i$ *para toda la cartera en un año.* Para ello bastará con recordar que las distribuciones de Poisson compuestas forman una familia cerrada por convolución. Recordemos que el número total de pólizas de la cartera es $n = 280162$.

Por tanto suponiendo que las variables aleatorias N_i son independientes e idénticamente distribuidas, la distribución de N será la convolución n-ésima de la Poisson Pascal generalizada. Concluimos entonces que la distribución de N es también una Poisson Pascal generalizada, en donde la primaria es una $P(\lambda_{Tot})$ cuyo parámetro es

$$\lambda_{Tot} = n\hat{\lambda} = 62753.5331390378$$

y la secundaria vuelve a ser la $BNET(\hat{r}, \hat{\beta})$ antes estimada.

Las siguientes características de la distribución se calculan fácilmente siguiendo los procedimientos habituales (derivadas sucesivas de la fgm). Se trata de los momentos centrados en el origen hasta el orden 3 (m_i), la varianza (σ_N^2) y el coeficiente de asimetría (γ_N):

$$\begin{aligned} m_1 &= 68004.000179759766700 \\ m_2 &= 4624624015.7706170844\ 10^{10} \\ m_3 &= .34304141554028258892\ 10^{20} \\ \sigma_N^2 &= 79975.321850702797315 \\ \gamma_N &= .48226600600687986932\ 10^{-2} \end{aligned} \qquad (16)$$

Las anteriores características nos indican, por ejemplo, que el *número medio de siniestros/año de toda la cartera* es m_1=68004.

2.4 DISTRIBUCIÓN DE LA CUANTÍA INDIVIDUAL DE LOS SINIESTROS

Respecto de la variable aleatoria X de la cuantía individual de los siniestros, se han considerado los siguientes datos del coste de 99476 siniestros de responsabilidad civil autos durante el mismo periodo de tiempo. La unidad monetaria es igual a 10^3 ptas.

Intervalos De Coste	*Número de Siniestros*	*Coste Medio del Intervalo*
< 50	37632	28
50-100	37818	75
100-250	14147	154
250-500	5110	350
500-750	1665	611
750-1000	875	873
1000-1250	554	1121
1250-1500	346	1376
1500-1750	218	1627
1750-2000	210	1892
2000-4000	428	2885
4000-10000	301	6590
10000-20000	129	13809
>20000	43	34346

(17)

Tomemos como nueva unidad monetaria 10^{10} *ptas* (es decir 1 *u.m.*=10000 millones de pesetas). A partir de los anteriores datos, consideramos como distribución de la variable X a la distribución empírica que resulta de situar la cuantía de probabilidad (*Nº de Siniestros*/99476) correspondiente a cada intervalo de coste, sobre el coste medio del intervalo medido en la nueva unidad monetaria (*Coste Medio del Intervalo*/10^7). A modo de ejemplo, sobre el punto $\frac{28}{10^7} = \frac{7}{2500000} = .28\ 10^{-5}$ situaremos la cuantía correspondiente al primer intervalo, es decir $\frac{37632}{99476} =$ .3783023… En la siguiente tabla presentamos las cuantías de la distribución del coste de un siniestro.

x	v_x
$.28\ 10^{-5}$	.37830230407334432426
$.75\ 10^{-5}$	.38017210181350275443
$.154\ 10^{-4}$	.14221520768828662190
$.35\ 10^{-4}$	$.51369174474245044031\ 10^{-1}$
$.611\ 10^{-4}$	$.16737705577224657204\ 10^{-1}$
$.873\ 10^{-4}$	$.87960915195625075395\ 10^{-2}$
$.1121\ 10^{-3}$	$.55691825163858619164\ 10^{-2}$
$.1376\ 10^{-3}$	$.34782259037355744099\ 10^{-2}$
$.1627\ 10^{-3}$	$.21914833728738590213\ 10^{-2}$
$.1892\ 10^{-3}$	$.21110619646950018095\ 10^{-2}$
$.2885\ 10^{-3}$	$.43025453375688608308\ 10^{-2}$
$.659\ 10^{-3}$	$30258554827295025936\ 10^{-2}$
$.13809\ 10^{-2}$	$.12967952068840725401\ 10^{-2}$
$.34346\ 10^{-2}$	$.43226506896135751337\ 10^{-3}$

(18)

A continuación calculamos las características de la distribución. Los momentos centrados en el origen los notamos c_i, y el momento de orden 3 centrado en la media lo notamos cm_3. A continuación vienen la varianza, la desviación típica (σ_X), y el coeficiente de asimetría (γ_X).

$$c_1 = .18058746833407052958\ 10^{-4}$$
$$c_2 = .97641755135912179822\ 10^{-8}$$
$$c_3 = .21950964989744913346\ 10^{-10}$$

$$cm_3 = .21433757245812428416\ 10^{-10}$$
$$\sigma_X^2 = .94380571763981287197\ 10^{-8}$$
$$\sigma_X = .97149663799717437415\ 10^{-4}$$
$$\gamma_X = 23.376226233158783412$$

Observamos por tanto un *coste medio del siniestro* igual a 180.587 ptas.

3. LA DISTRIBUCIÓN DEL DAÑO TOTAL EN UN AÑO. LA APROXIMACIÓN NORMAL

De la anterior discusión se deduce que la distribución del daño total S para un año es una compuesta cuya primaria es Poisson Pascal generalizada y cuya secundaria es la distribución v del coste X de un siniestro. Por tanto nos encontramos de hecho ante una composición de tres distribuciones (siguiendo la notación de (1), las correspondientes a las variables aleatorias R,M,X). Significa esto que cualquier transformada de S se expresará como composición de las transformadas de las anteriores variables primaria, secundaria y terciaria. A modo de ejemplo, la fgm de S es

$$M_S(z)=P_1(P_2(M_X(z))$$

Siendo P_1, P_2 las fgp de la primaria y la secundaria, y $M_X(z)$ la fgm del coste de un siniestro (o variable terciaria). La anterior expresión es muy útil a la hora de calcular las características de la distribución compuesta. Pero también nos orienta acerca del cálculo de sus cuantías. En efecto, podríamos proceder a aplicar el algoritmo recursivo de Panjer (resultado ya utilizado para calcular las cuantías de la Poisson Pascal generalizada) en dos etapas.

- En la primera etapa consideramos la compuesta con variable aleatoria primaria R (distribuida según una $BNET(\hat{r},\hat{\beta})$) y secundaria X, y calculamos sus cuantías aplicando el algoritmo.

- Estas últimas, pasan a ser las cuantías secundarias de una compuesta cuya distribución primaria es la $P(\hat{\lambda})$. Volviendo a aplicar el algoritmo de Panjer, obtenemos como resultado las cuantías de la distribución del daño total *S*.

Sin embargo la segunda etapa comporta una dificultad numérica que, aunque puede llegar a ser resuelta *[Panjer & Willmot (1992, p.200)]*, hace que la distribución de *S* sea difícil manejo. En efecto, para arrancar el algoritmo recursivo, necesitamos conocer previamente la cuantía en s=0, y como ya quedó indicado más arriba, esta implicaría el cálculo de $e^{-\lambda_{Tot}}$. Debido a que el parámetro λ_{Tot} es muy grande es posible que la anterior exponencial sea un número más pequeño que el cero de la máquina, con lo que la recursión no podrá arrancar. Incluso en el caso en que esta dificultad fuese resuelta, las cuantías significativas de la Poisson se encuentran muy alejadas del origen (recordemos que su media es λ_{Tot}=62753.5331390378) con la consiguiente dificultad para el cálculo y posterior almacenamiento y manejo de estas.

Ahora bien, un análisis de las características de la distribución del daño total nos puede evitar todas estas trabas engorrosas, mediante el empleo justificado de la aproximación normal para la variable aleatoria *S*.

En efecto, recordando que la unidad monetaria es 10^{10} *ptas,* se obtienen los siguientes valores para los momentos centrados en el origen (μ), la varianza y la desviación típica (σ), y el coeficiente de asimetría (γ):

$$\begin{aligned}
&\mu = 1.2280670229052493470\\
&\mu_2 = 1.5088165198082610190\\
&\mu_3 = 1.8545697799793580579\\
&\sigma^2 = .66790706089879463605\ 10^{-3}\\
&\sigma = .25843897943204980782\ 10^{-1}\\
&\gamma = .86848299578943909126\ 10^{-1}
\end{aligned} \tag{19}$$

Por tanto, dado que el coeficiente de asimetría es suficientemente pequeño, es perfectamente posible *(véase [Beard, Pentikaïnen,* *Pesonen. (1982, p.106)]* aproximar mediante una N (μ,σ) las probabilidades suministradas por la anterior distribución del daño total.

Digamos también que μ es la *siniestralidad media o esperada de toda la cartera durante un año*, y que esta asciende por tanto a 12280.67 millones de pesetas al año.

En lo que resta de trabajo, nuestra hipótesis básica respecto de la distribución del daño total en un año será considerarla como una N (μ,σ).

4. EVOLUCIÓN DE LAS RESERVAS. PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA

Justificada razonadamente la elección de una distribución para el daño total, y dado que nuestro objetivo es el estudio de la reserva o provisión técnica de estabilización, necesitamos definir un modelo para la evolución futura de dichas reservas. Para ello consideraremos un modelo sencillo y ampliamente estudiado en la literatura actuarial. Llamando $\{R_n : n \in \mathrm{N}\}$ a las variables aleatorias *estado de la reserva al final del año n*, podemos escribir

$$R_n = R_0 + n(1+\theta)\mu - \sum_{i=1}^{n} S_i = R_0 + nc - \sum_{i=1}^{n} S_i, \qquad (20)$$

siendo $R_0 \geq 0$ la reserva inicial, θ el recargo de seguridad, μ la esperanza del daño total, S_i el daño total de la cartera durante el año i. Estamos suponiendo que $(S_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas según una $N(\mu,\sigma)$.

5. CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA

Una vez fijado el modelo para la evolución futura de la reserva, la probabilidad Φ_n de supervivencia a n años es conocida. Ciñéndonos a los casos $n = 1,2,3$, sabido es que las funciones Φ_1, Φ_2, Φ_3, satisfacen la siguiente recursión *[Bühlmann, (1970, p.137)]*:

$$\Phi_n(R_0) = \int_0^{R_0+c} \Phi_{n-1}(R_0 + c - y)dF(y) \tag{21}$$

en donde hemos llamado F a la distribución del daño total para un año. Esta fórmula recursiva es la que nos permite expresar todas las probabilidades de supervivencia a partir de la correspondiente a un año.

Desde el punto de vista numérico, el cálculo de Φ_1, Φ_2 para distintos valores de R_0, θ no representa ningún problema y puede ser ejecutado en un ordenador personal con las características comunes que se ofrecen actualmente en el mercado[2].

El caso de Φ_3 es más problemático, ya que se trata de un integral triple siendo bien conocidos los problemas que comporta el cálculo numérico de integrales múltiples, tanto al nivel algorítmico como al nivel de los recursos de hardware necesarios para llevar a buen término los cálculos *(véase [Press, W.H.,..., (1994, p.144)])*. Si bien el lenguaje de programación utilizado en este caso fue el mismo que en los anteriores (Maple versión 5.1), los programas fueron ejecutados en una máquina más grande[3].

---

[2] En nuestro caso se utilizó un ordenador personal tipo Pentium a 120 Mhz y 16 Mb de memoria RAM.

[3] Fueron ejecutados en una máquina Unix Alpha Server 8200 TurboLaser con las siguientes características: dos procesadores Alpha a 300 Mhz, 64 bits, 512 Mb de memoria central, y 40 Gb de disco.

En los siguientes epígrafes notaremos $N_{\mu\sigma}(x), n_{\mu\sigma}(x)$ a las funciones de distribución y de densidad del daño total. En los cálculos subsiguientes tendremos en cuenta que, dados los valores ajustados a los parámetros μ, σ, cualquiera de esas dos funciones evaluadas en el origen son suficientemente pequeñas como para despreciar la probabilidad acumulada en el intervalo ($-\infty,0$].

5.1 PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA A UN AÑO

Fijándonos en la probabilidad de supervivencia a un año, esta se expresa de la siguiente forma

$$\Phi_1(R_0) = P\{S_1 \leq R_0 + c\} = N_{\mu\sigma}(R_0 + c) \tag{22}$$

La siguiente tabla resume los cálculos realizados para ciertos valores de R_0, θ. Los valores calculados han sido truncados a partir del quinto dígito decimal. Recordemos que la unidad monetaria es 10^{10} *ptas.*

Φ_1	θ **=0%**	θ **=1%**	θ **=2%**	θ **=3%**	θ **=4%**	θ **=5%**	θ **=6%**	θ **=7%**
R_0=0	.5	.6829	.8294	.9233	.9715	.9913	**.9978**	.9995
R_0=.022	.8030	.9080	.9644	.9887	**.9970**	.9993	.9998	.9999
R_0=.0466	.9645	.9887	**.9970**	.9993	.9998	.9999		
R_0=.071	**.9970**	.9993	.9998	.9999				

(23)

5.2 PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA A DOS AÑOS

Haciendo uso de (21) deducimos que Φ_2 es igual a

$$\Phi_2(R_0) = \int_0^{R_0+c} N_{\mu\sigma}(R_0 + 2c - x)\, n_{\mu\sigma}(x)\, dx \tag{24}$$

La siguiente tabla resume los cálculos realizados para los mismos valores de R_0, θ que en el caso de un año. Los valores calculados han sido truncados a partir del quinto dígito decimal. Recordemos que la unidad monetaria es 10^{10} *ptas.*

Φ_2	θ =0%	θ =1%	θ =2%	θ =3%	θ =4%	θ =5%	θ =6%	θ =7%
R_0=0	.375	.6079	.7994	.9154	.9701	.9911	.9978	.9999
R_0=.022	.6656	.8522	.9493	.9860	.9967	.9993	.9998	.9999
R_0=.0466	.8865	.9682	.9935	.9989	.9998	.9999		
R_0=.071	.9730	.9952	.9994	.9999				

(25)

5.3 PROBABILIDADES DE SUPERVIVENCIA A TRES AÑOS

Volviendo a aplicar (21) obtenemos la siguiente expresión para Φ_3:

$$\Phi_3(R_0) = \int_0^{R_0+c} \left[\int_0^{R_0+2c-y} N_{\mu\sigma}(R_0 + 3c - x - y) n_{\mu\sigma}(x) dx \right] n_{\mu\sigma}(y) dy \qquad \textbf{(26)}$$

Los resultados obtenidos mediante la integración numérica de (26) se resumen en la siguiente tabla. La unidad monetaria es 10^{10}*ptas*, y en este caso los resultados han sido truncados a partir del sexto dígito decimal.

Φ_3	θ =0%	θ =1%	θ =2%		Φ_3	θ =0%	θ =1%	θ =2%
R_0=.03	.66702	.87851	.96804		**R_0=.085**	.96796	.99604	.99971
R_0=.035	.71692	.90644	.97815		**R_0=.09**	.97561	**.99725**	.99982
R_0=.04	.76192	.92881	.98527		**R_0=.1**	.98629	.99872	.99993
R_0=.045	.80184	.94642	.99019		**R_0=.11**	.99262	.99942	.99997
R_0=.048	.82335	.95504	.99235		**R_0=.115**	.99467	.99962	
R_0=.05	.83671	.96008	.99353		**R_0=.12**	.99619	.99975	
R_0=.052	.84929	.96461	.99454		**R_0=.125**	**.99730**	.99984	
R_0=.055	.86676	.97053	.99577		**R_0=.13**	.99811	.99989	
R_0=.059	.88755	.97704	**.99701**		**R_0=.135**	.99869	.99993	
R_0=.06	.89233	.97844	.99726		**R_0=.14**	.99911	.99996	
R_0=.07	.93170	.98876	.99887		**R_0=.15**	.99959	.99998	
R_0=.08	.95835	.99434	.99954		**R_0=.2**	.99999	.99999	

(27)

6. CONCLUSIONES

1. A lo largo de este artículo se ha probado empíricamente la bondad del ajuste de la distribución del número de siniestros en el seguro de Responsabilidad Civil del Automóvil, mediante la aplicación de una distribución de *Poisson-Pascal generalizada*, en donde la primaria es una Poisson y la secundaria es una *binomial negativa extendida y truncada*. Por el contrario, el test de la X^2 de Pearson rechazó los ajustes de la distribución *binomial negativa* (o Poisson ponderada por una Gamma) y de la distribución de *Poisson ponderada por una inversa gaussiana*, ajustes aplicados habitualmente en la práctica actuarial cuando se trata de modelizar el número de siniestros con fines de tarificación o de solvencia en el seguro del automóvil.

2. Considerando un horizonte temporal de tres años, se han obtenido los valores numéricos de las *reservas o provisiones de estabilización iniciales* (R_0) y del *recargo técnico sobre primas* (θ) para distintas *probabilidades de supervivencia*. El código correspondiente al cálculo numérico de la integral triple tuvo que ser ejecutado en una máquina con mayores capacidades de memoria, velocidad y almacenamiento de datos, que las proporcionadas por un ordenador personal. De los resultados obtenidos se deduce que si fijamos una probabilidad de insolvencia similar a la adoptada por el grupo de trabajo dirigido por el Profesor Campagne para la determinación del margen mínimo de solvencia de la Comunidad Económica Europea, es decir el 3 por mil, se obtienen unas reservas de estabilización $R_0 \simeq 590$ millones de ptas para un recargo técnico θ=2 % sobre las primas puras. Otros valores óptimos de las variables de decisión para la misma probabilidad de insolvencia son $R_0 \simeq 900$ millones de ptas y θ=1 % sobre primas puras, y finalmente $R_0 \simeq 1250$ millones de ptas para θ=0. Conviene señalar a este respecto que en R_0 debemos incluir, en su caso, además de las reservas de estabilización, la parte de patrimonio no comprometido de la Entidad afecto a la modalidad de seguro objeto de este estudio (Responsabilidad Civil Autos en este caso).

REFERENCIAS

Beard,R.E., Pentikaïnen,T., Pesonen, E. (1982). "Risk Theory. The Stochastic Basis of Insurance". Chapman and Hall.

Bühlmann, H. (1970). "Mathematical Methods in Risk Theory". Springer-Verlag.

Klugman,S.A., Panjer,H.H., Willmot,G.E. (1998). "Loss Models. From Data to Decisions". Willey Series in Probability and Statistics.

Lemaire, J. (1995). "Bonus-Malus System in Automobile Insurance". Kluwer Academic Press.

Monagan,M.B., Geddes,K.O., Heal,K.M., Labahn,G., Vorkoetter, S.M. (1996). "Maple V. Programming Guide". Springer-Verlag.

Panjer,H.H., Willmot,G.E. (1992). "Insurance Risk Models". Society of Actuaries.

Press,W.H., Flannery,B.P., Teukolsky,S.A., Vetterling,W.T. (1994). "Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Computing". Cambridge University Press.

Vegas Asensio,J., Nieto de Alba,U. (1993). "Matemática Actuarial". Editorial Mapfre.

Vilar, J.L., García Cid, Y. (1999). "Matemática Actuarial No Vida con Maple V". Cuadernos de la Fundación Nº 48. Fundación Mapfre Estudios.