ALGUNOS ASPECTOS ACTUARIALES QUE SURGEN EN LAS APLICACIONES DEL REGLAMENTO DE ORDENACION Y SUPERVISION DE LOS SEGUROS PRIVADOS

Dr. Jesús Vegas Asensio
Catedrático de Matemática Actuarial
de la Universidad Complutense de Madrid

KEYWORDS

Distribuciones de Poisson compuestas; distribución de Poisson-Pascal generalizada; distribución binomial negativa extendida y truncada; recargo de seguridad sobre primas; probabilidad de ruina en horizonte finito; provisión técnica de primas no consumidas; índices de variación estacional.

ABSTRACT

En este artículo se contemplan tres aspectos actuariales derivados de la aplicación del vigente Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados. En primer lugar se aborda un problema muy frecuente en la tarificación de los Ramos No Vida consistente en el ajuste de la distribución de probabilidad del número de siniestros.

Siguiendo principalmente las investigaciones de Panjer y Willmot, en este apartado proponemos el ajuste de distribuciones de Poisson compuestas, recogiéndose como distribuciones secundarias más importantes la binomial negativa ordinaria, la logarítmica y la distribución binomial negativa extendida y truncada.

El segundo aspecto tratado es la estimación del recargo técnico o de seguridad sobre primas (artículo 77 del Reglamento), adoptando como principales criterios el de la distribución de la siniestralidad total - neta de reaseguro - en un horizonte temporal de tres años como

mínimo, y como segundo criterio el de la función de ruina en horizonte infinito.

Finalmente, en tercer lugar se analiza la provisión técnica de primas no consumidas, poniéndose de manifiesto como en la mayoría de las aplicaciones a la práctica actuarial, es necesario dar entrada al componente estacional de la siniestralidad.

1. DISTRIBUCIONES COMPUESTAS EN LA MODELIZACION DEL NUMERO DE SINIESTROS.

En las aplicaciones actuariales de los artículos 76 - Pólizas y Tarifas de primas - y 77 - Normas generales sobre Bases Técnicas - del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, surge en muchas ocasiones la necesidad de ajustar la distribución de probabilidad del número de siniestros a los datos empíricos disponibles por el actuario.

Las distribuciones más utilizadas en la práctica son las distribuciones simples y ponderadas, por ejemplo en el Seguro del Automóvil, Poisson simple, Poisson ponderada por la distribución Gamma de dos parámetros (Binomial negativa) y Poisson ponderada por la distribución Inversa Gaussiana; sin embargo con frecuencia nos encontramos con que estas distribuciones no superan el test clásico de la X^2 de Pearson, por lo que el actuario debe elegir el modelo de probabilidad que mejor se ajuste a los datos observados, pese a que el valor nuestral del estadístico X^2 pertenezca a la región crítica del contraste.

El objetivo de este primer aspecto técnico es plantear la modelización del número de siniestros como una distribución compuesta a fin de ampliar las posibilidades del actuario de lograr un buen ajuste a esta variable de tipo discreto.

Para ello vamos a recordar brevemente las siguientes distribuciones:

-Poisson simple.

$P(n)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \quad (\lambda>0)$ Función de cuantía (n=0,1,2,...)

$\mu=\sigma^{2}=\lambda$ Media = Varianza

$g(z)=e^{\lambda\left[e^{z}-1\right]}$ F. Generatriz de momentos

-Binomial Negativa (Poisson ponderada por la Gamma de 2 parámetros)

$$P(n)=\binom{-mh}{n}\left(-\frac{1}{1+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh}=\binom{n+mh-1}{n}\left(\frac{1}{1+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{1+h}\right)^{mh} \quad ,$$

o bien, haciendo el cambio $r=m.h>0$ y $\beta=1/h>0$

la función de cuantía es

$$P(n)=\binom{n+r-1}{n}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{n}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{r}=\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)n!}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{n}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{r};$$

(n=0,1,2...)

$$\mu=r\beta \ ; \qquad \sigma^{2}=r\beta\,(1+\beta)$$

$$g(z)=\left[1-\beta\left(e^{z}-1\right)\right]^{-r}$$

-logarítmica

$$P(n)=\frac{1}{n\log(1+\beta)}\left(\frac{\beta}{(1+\beta)}\right)^{n} \ ; \text{(n=1,2,3,...) siendo } 0<\frac{\beta}{1+\beta}<1$$

$$\mu = \frac{\beta}{\log(1+\beta)} \quad ; \qquad \sigma^2 = \frac{\beta(1+\beta)\log(1+\beta)-\beta^2}{[\log(1+\beta)]^2}$$

$$g(z) = \frac{\log[1-\beta(z-1)] - \log(1+\beta)}{-\log(1+\beta)} \quad ; \quad |z| < \frac{1+\beta}{\beta}$$

-Gamma (2 parámetros)

Función de densidad $f(x) = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} X^{\alpha-1} e^{-hx} \quad ; \quad x > 0 \, ; \; \alpha, h > 0$

$$\mu = \frac{\alpha}{h} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{\alpha}{h^2}$$

-Exponencial

Función de densidad $f(x) = he^{-hx} \quad ; \; x > 0 \; ; \; h > 0$

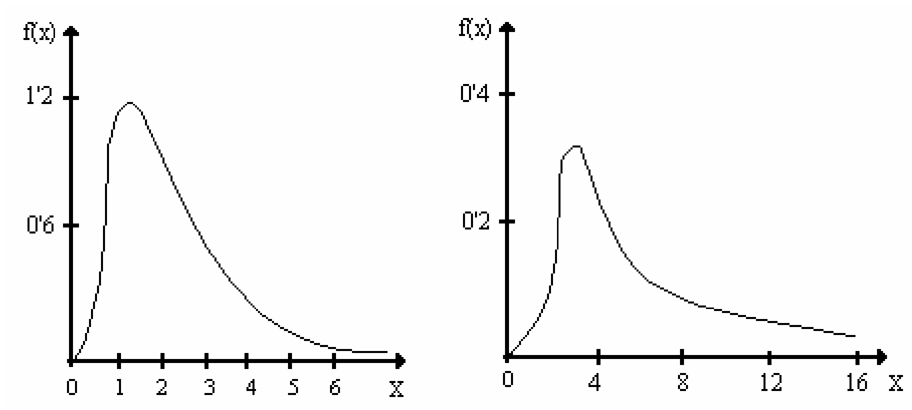
$$\mu = \frac{1}{h} \quad ; \qquad \sigma^2 = \frac{1}{h^2}$$

-Inversa Gaussiana

Función de densidad $f(x) = \mu\left(2\Pi\beta X^3\right)^{-1/2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}} \quad ; \; x > 0 \; ; \; \mu, \beta > 0$

Media = μ ;   Varianza = μ β

μ=1 ; β=1   μ=5 ; β=1/2



-Distribución compuesta

Este concepto surge al considerar simultáneamente dos distribuciones, una llamada distribución **primaria**, de tipo discreto con espacio numérico {0,1,2,3,...}, que corresponde al número aleatorio de sumandos, y otra distribución, denominada distribución **secundaria**, que corresponde a los valores aleatorios de dichos sumandos.

Es decir, es la suma de un número aleatorio de variables aleatorias.

Un ejemplo típico de distribución compuesta en la Matemática Actuarial es la distribución de la siniestralidad total en un periodo fijo $[0,t)$.

En efecto, considerando como variables:

- distribución primaria = Variable aleatoria asociada al número de siniestros en $[o,t)$.
- distribución secundaria = Variable aleatoria asociada a la cuantía del siniestro í-símo.

El daño o siniestralidad total en $[o,t)$ viene dado por $X(t) = X_1 + X_2 + ... + X_n$ es decir, $X(t)$ es una suma de un número (n) aleatorio de variables aleatorias (X_i).

Haciendo la hipótesis que dichas variables (X_i) están igualmente distribuidas, son independientes entre sí y del número de siniestros (n), la función de distribución del daño total resulta[1] (1).

$$F(x,t) = P[X(t) \leq X] = \sum P(n,t) V^{*n}(x) \qquad \text{donde}$$

$P(n,t) \equiv$ Probabilidad de n stros en $[0,t)$

$V^{*n}(x) \equiv$ Probabilidad de que habiendo ocurrido n siniestros alcancen la cuantía X. Es decir, la convolución n - sima de $V(x)$.

Si llamamos $v(x) = V'(x)$ a la función de densidad de la cuantía de un siniestro, la función de densidad del daño total queda:

$$f(x,t) = \sum P(n,t) v^{*n}(x)$$

Asimismo, los momentos de la distribución compuesta se pueden calcular en función de los momentos de las distribuciones primaria y secundaria.

Por ejemplo:

$E[X(t)] = \bar{n}\,\bar{c} = E[N(t)]E(x)$ (Número medio de siniestros por coste medio)

$\sigma^2[X(t)] = \bar{n}\,\sigma^2(x) + (\bar{c})^2 \sigma^2[N(t)]$

donde

$\sigma^2(x) \equiv$ Varianza de la distribución del coste del siniestro

$\sigma^2[N(t)] \equiv$ Varianza de la distribución del número de siniestros

[1] Ver, por ejemplo, Vegas Asensio, J. Y Nieto de Alba, U. (1993) “Matemática Actuarial”, Mapfre Estudios.

Una propiedad importante de las distribuciones compuestas es que la función generatriz de momentos de la distribución compuesta es igual a la función generatriz de la distribución primaria con argumento la función generatriz de la distribución secundaria.

Es decir, en nuestro caso resulta:

$$g_{x(t)}(z) = g_N\left[g_x(z)\right]$$

$g_N \equiv$ Función generatriz del número de siniestros
$g_x(z) \equiv$ Función generatriz del coste de siniestro

Por tanto, si la función de cuantía del número de siniestros corresponde al modelo de Poisson simple, entonces:

$$g_x(t) = e^{\bar{n}[g_x(z)-1]}$$

El modelo del número de siniestros como distribución compuesta

Sea M el número de accidentes que ocurren en un periodo fijo (por ejemplo un año), variable aleatoria de tipo discreto cuyo espacio numérico es $\{0,1,2,3,...\}$- y N_i $(i = 1,2,3,...)$el número de siniestros originados por el accidente í-simo.

En consecuencia, podemos poner:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_M$$

donde las variables N_i son de tipo discreto, independientes e igualmente distribuidos y la variable M es independiente de las N_i.

N es una suma aleatoria de variables aleatorias y expresa el número total de siniestros en el periodo considerado. Se trata, por tanto, de una distribución compuesta en la que tanto la distribución primaria

(M o número de accidentes) como la distribución secundaria (N_i o número de siniestros causados por un accidente) son discretas.

Siguiendo a Panjer y Willmot[2], si consideramos como distribución primaria la de Poisson con parámetro λ y la función de cuantía de la distribución secundaria es $f_2(N_i)$, $N_i = 1,2,3,...$, se demuestra fácilmente la siguiente fórmula de recurrencia o algoritmo de Panjer:

$$P(n) = \frac{\lambda}{n}\sum_{y=1}^{n} Y\, f_2(Y)P(n-y) \qquad ;\ n=1,2,3,...$$

siendo $P(n)$ la función de cuantía de N o número total de siniestros y $P(0) = e^{-\lambda}$.

Por ejemplo, si λ= 0'2 accidentes por año y $f_2(N_i) = \begin{cases} 0'8 \text{ para } N_i = 1 \\ 0'2 \text{ para } N_i = 2 \end{cases}$

las probabilidades asociadas a cada valor de N se calculan de la forma siguiente[3]:

$$P(0) = P[N=0] = e^{-\lambda} = 0'81873$$

$$P(1) = P[N=1] = \lambda f_2(1)P(0) = (0'2)(0'8)(0'8187) = 0'13099$$

$$P(2) = P[N=2] = \frac{\lambda}{2}[f_2(1)P(1) + 2f_2(2)P(0)] = 0'04323$$

$$P(3) = P[N=3] = \frac{\lambda}{3}[f_2(1)P(2) + 2f_2(2)P(1)] = 0'00580$$

$$P(4) = P[N=4] = \frac{\lambda}{4}[f_2(1)P(3) + 2f_2(2)P(2)] = 0'00109$$

---

[2] Panjer H. y Willmot, G. (1992) "Insurance Risk Models". Society of Actuaries U.S.A.

[3] Panjer H. y Willmot, G. (1992) ob.cit págs. 172 y ssg.

-La función de distribución de la variable N (nº de siniestros en el periodo considerado) resulta:

n	$F(n)$
0	0'81873
1	0'94973
2	0'99295
3	0'99875
4	0'99985
5	0'99998

-La distribución Binomial Negativa como distribución de Poisson Compuesta

Consideremos ahora el caso de distribución secundaria logarítmica, es decir, la probabilidad que un accidente cause n siniestros viene dada por:

$$f_2(N_i) = P(N_i = n) = \frac{1}{n \log(1+\beta)} \left(\frac{\beta}{(1+\beta)} \right)^n \qquad ; \qquad n = 1,23,..$$

$$0 < q = \frac{\beta}{1+\beta} < 1$$

con función generatriz:

$$g_2(z) = \frac{\log(1-qz)}{\log(1-q)}$$

La función generatriz de la distribución compuesta (N), se obtiene a partir de las funciones generatrices de las distribuciones primaria y secundaria como hemos puesto de relieve anteriormente. Es decir,

$$g_N(z) = g_1[g_2(z)] = e^{\lambda[g_2(z)-1]}$$

donde los dígitos 1 y 2 se refieren, respectivamente, a las distribuciones primaria y secundaria.

Sustituyendo $g_2(z)$ del modelo logarítmico queda:

$$g_N(z) = e^{\lambda\left\{\frac{\log(1-qz)}{\log(1-q)}-1\right\}} = e^{\frac{\lambda}{\log(1-q)}\log\left(\frac{1-qz}{1-q}\right)} = \left(\frac{1-qz}{1-q}\right)^{\frac{\lambda}{\log(1-q)}} = \left(\frac{1-qz+q-q}{1-q}\right)^{-r}$$

donde $r = -\dfrac{\lambda}{\log(1-q)}$

$$g_N(z) = \left[1 - \frac{q}{1-q}(z-1)\right]^{-r}$$

llamando $\beta = \dfrac{q}{1-q}$, la función generatriz del número total de siniestros es $g_N(z) = [1-\beta(z-1)]^{-r}$ que corresponde a la $f\ g$ de la distribución binomial negativa, como modelo de probabilidad del número de siniestros en un periodo fijo.

Por ejemplo, Lemaire[4] analiza los siguientes datos a partir de una muestra de $n = 4.000$ pólizas en el seguro del automóvil.

		Frecuencias Teóricas	
Nº de siniestros	**Nº de pólizas (P)**	**Poisson**	**Binomial Negativa**
0	3719	3668.54	3719.22
1	232	317.33	229.90
2	38	13.72	39.91
3	7	0.40	8.42
4	3	0.01	1.93
5	1	0	0.46

[4] Lemaire, J. (1985) “Automobile Insurance Actuarial models”. Kluwer.

Los parámetros están estimados por el método de la máxima verosimilitud. En el ajuste de la distribución de Poisson simple el E.M.V., como es bien conocido, resulta $\hat{\lambda} = \hat{X}$, por lo que haciendo operaciones tenemos que $\hat{\lambda}$ = 0.0865 siniestros/póliza.

En el ajuste de la distribución de Poisson compuesta (Poisson-logarítmica) la función de verosimilitud viene dada por

$$L(r,\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\left[i \log \beta - (r+i)\log(1+\beta)\right] + \sum_{i=1}^{\infty} P_i\left[\sum_{m=0}^{i-1} \log(r+m)\right]$$
$$-\sum_{i=0}^{\infty} P_i(\log i!)$$

El E.M.V. de los parámetros r y β verifica la condición necesaria (y suficiente)

$$\frac{\partial L(r,\beta)}{\partial r} = -\sum_{i=0}^{\infty} P_i\left[\log(1+\beta)\right] + \sum_{i=1}^{\infty} P_i\left[\sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{r+1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial L(r,\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\left[\frac{i}{\beta} - \frac{r+i}{1+\beta}\right] = 0$$

Haciendo operaciones se llega a las ecuaciones

$$\hat{r}\,\hat{\beta} = \hat{X}$$

$$n \log\left(1+\hat{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\left[\sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{\hat{r}+m}\right]$$

Teniendo en cuenta que $\hat{r} = \hat{\mu}\,\hat{h}$ y $\hat{\beta} = 1/\hat{h}$ el E.M.V. de la media poblacional μ es también la media muestral $\hat{X}$.

Sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos

$$H(\hat{r}) = n \log\left(1 + \frac{\overline{X}}{\hat{r}}\right) - \sum_{i=1}^{\infty} P_i \left[\sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{\hat{r} + m}\right] = 0$$

Esta segunda ecuación puede resolverse mediante cálculo numérico aplicando el algoritmo de Newton-Raphson. Este algoritmo ha sido desarrollado en sistema MAPLE por el profesor de nuestro departamento José Luis Vilar. Ya que

$$H'(r) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \left[\sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{(r+m)^2}\right] - \frac{n\overline{X}}{r^2 + r\overline{X}}$$

el E.M.V. de r se puede obtener aplicando K iteraciones de la forma

$$r_K = r_{K-1} - \frac{\mathrm{H}(\mathrm{r}_{K-1})}{\mathrm{H}'(\mathrm{r}_{k-1})}$$

El proceso debe repetirse hasta que r_K esté suficientemente próximo a r_{K-1}, siempre a partir de un valor dado r_0 que puede ser el valor estimado por el método de los momentos.

Volviendo a los datos muestrales, los E.M.V. de los parámetros de las distribuciones del número de accidentes (Poisson) y del número de siniestros por accidente (logarítmica), son

$\hat{\lambda} = \hat{r} \log(1 + \hat{\beta}) = 0.0727799$ como número medio de accidentes por póliza asegurada y

$\hat{q} = \dfrac{\hat{\beta}}{1 + \hat{\beta}} = 0.285231$ como parámetro que define la distribución logarítmica.

La función de cuantía de esta última distribución es[5]

[5] Panjer H. y Willmot, G. (1992) ob.cit. pág.211

N	$f_2(N)$
1	0.84942
2	0.12114
3	0.02304
4	0.00493
5	0.00112

Lo que significa que el 84.9% de los accidentes causantes de siniestros, han originado un sólo siniestro; el 12.1% han originado dos siniestros y así sucesivamente.

En la práctica actuarial es evidente que las Entidades aseguradoras con baja cuota de mercado tendrán probabilidades más pequeñas de tener más de un siniestro en caso de producirse algún accidente que aquellas Compañías con cuota de mercado más alta.

Finalmente los E.M.V. de r y β son:

$\hat{r} = 0.2166$ y $\hat{\beta} = 0.399354$, o bien $\hat{h} = 2.50404$

En este caso, el ajuste de la Binomial negativa se acepta y el de la distribución de Poisson se rechaza.

Planteamiento general de las distribuciones de Poisson compuestas

Partiendo de la distribución de Poisson como distribución primaria la $f\ \ g$ de la distribución del número de siniestros (N) recordemos que es $g_N(z) = e^{\lambda[g_2(z)-1]}$ $\quad g_2(z) \equiv f\ g$ de la variable secundaria.

Las probabilidades $P(N = n)$ se obtienen a partir de la expresión[6]

---

[6] Panjer H. y Willmot, G. (1992) ob.cit. pág.255

$$P(N=n)=\frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n} j\, q_j P(N=n-j) \qquad ; n= 1,2,3,.... (1)$$

con

$$P(N=0)=e^{-\lambda(1-q_0)}$$

donde q_j son las probabilidades de la distribución secundaria.

Entre los modelos más relevantes en el estudio de la variable número total de siniestros (N) destacan los siguientes:

Distribución secundaria

1. Binomial
2. Poisson
3. Logarítmica
4. Binomial negativa
5. Geométrica
6. Binomial negativa extendida y truncada

El Caso 1) Poisson-Binomial tiene por fg

$$g_N(z)=e^{\lambda\{[1+q(z-1)]^m-1\}}$$

Cuando m=1 la distribución de N es Poisson simple con media λq. Si m=2 la variable compuesta se llama distribución de Hermite.

Se trata de una distribución con tres parámetros $\lambda; q$;m.

Los principales momentos son:

$$\mu = m\lambda q \qquad \text{Media}$$

$$\sigma^2 = \mu[1+(m-1)q] \qquad \text{Varianza}$$

$$\gamma = \left(\sigma^2\right)^{-3/2} \left\{ 3\sigma^2 - 2\mu + \left(\frac{m-2}{m-1}\right) \frac{\left(\sigma^2 - \mu\right)^2}{\mu} \right\} \qquad \text{Simetría}$$

El Caso 2) Poisson-Poisson o distribución Neyman Tipo A tiene por *fg*

$$g_N(z) = e^{\lambda_1 \left[e^{\lambda_2 (z-1)} - 1\right]}$$

Los momentos más importantes son:

$$\mu = \lambda_1 \lambda_2 \qquad \text{Media}$$

$$\sigma^2 = \lambda_1 \lambda_2 \left(1 + \lambda_2\right) \qquad \text{Varianza}$$

$$\gamma = \frac{1 + 3\lambda_2 + \lambda_2^{\,2}}{\left(\lambda_1 \lambda_2\right)^{1/2} \left(1 + \lambda_2\right)^{3/2}} \qquad \text{Simetría}$$

El coeficiente de simetría también viene dado por la expresión

$$\gamma = \left(\sigma^2\right)^{-3/2} \left[3\sigma^2 - 2\mu + \frac{\left(\sigma^2 - \mu\right)^2}{\mu} \right]$$

Se observa la propiedad $\sigma^2 > \mu$, como ocurre también, por ejemplo, en la Binomial negativa.

Los cuatro casos restantes (logarítmica; Binomial negativa; Geométrica y Binomial negativa extendida truncada) se pueden definir conjuntamente a partir del concepto de distribución de Poisson-Pascal generalizada.

Como cuestión previa, vamos a recordar la función de cuantía de la Binomial negativa

$$P(n) = \binom{n+r-1}{n} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r \qquad \text{con } r > 0\,;\beta > 0$$

Considerando el valor particular $r = 1$, resulta

$$P(n) = \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n \left(\frac{1}{1+\beta} \right)$$ o distribución geométrica de parámetro β>0

Si ahora particularizamos para $r \to 0^+$ resulta

$$\lim_{r\to 0^+} P(n) = \lim_{r\to 0^+} \binom{n+r-1}{n} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^r = \frac{1}{n\,\boldsymbol{log}(1+\beta)} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^n$$

es decir, la función de cuantía de la distribución logarítmica con parámetro β.

Si, finalmente, extendemos el dominio del parámetro r al intervalo (-1,0) se tiene la distribución Binomial negativa extendida y truncada en el punto $n = 0$.

$$P(n) = P(1) \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r+1)n!} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^{n-1} \qquad ;\ n=1,2,3,...$$

En resumen, hemos visto que si $r > 0$ tenemos la distribución Binomial negativa ordinaria; si $r = 1$ la distribución geométrica; si $r \to 0^+$ la distribución logarítmica, y si $r \in$ (-1,0) la distribución Binomial negativa extendida y truncada.

Esta distribución de Poisson compuesta tiene por función generatriz[7]

[7] Panjer H. y Willmot G. (1983) "Compound Poisson models in actuarial risk theory" Journal of Econometrics

$$g_N(z) = e^{\lambda[g_2(z)-1]} = e^{\lambda\left\{\frac{[1+\beta(z-1)]^{-r}-(1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}-1\right\}} \quad ; \; r > -1 \; ; \; \lambda, \beta > 0$$

Cuando $r > 0$ se denomina **distribución Poisson-Pascal**. La distribución primaria es Poisson con $\mu = \lambda\left[1-(1+\beta)^{-r}\right]^{-1}$ y la secundaria es Binomial negativa de parámetros $r, \beta > 0$.

Cuando $r = 1$, la distribución se denomina **Polya-Aeppli**, la distribución primaria es Poisson de media $\mu = \lambda\left[1-(1+\beta)^{-r}\right]^{-1}$ y la secundaria es la distribución geométrica de parámetro β.

Cuando $r \in$ (0,-1), la distribución compuesta se denomina **Poisson-Pascal generalizada.** En este caso la distribución secundaria es la Binomial negativa extendida truncada.

Si $r = -0.5$ se obtiene la distribución de **Poisson ponderada por la Inversa Gaussiana**, que figura, en consecuencia, como un caso particular de la distribución de Poisson-Pascal generalizada.

Las probabilidades de la distribución de Poisson-Pascal generalizada se obtinen sustituyendo en la expresión (1) la fórmula recursiva de la binomial negativa extendida truncada

$$q_n = \frac{n+r-1}{n}\frac{\beta}{1+\beta}q_{n-1} \qquad ; \text{ n=2,3,4,...}$$

teniendo en cuenta que

$$q_1 = \frac{r}{(1+\beta)^r - 1}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)$$

y que en (1) $P(N=0) = e^{-\lambda}$ ya que la distribución secundaria está truncada en el punto cero.

Los principales momentos son:

Media $\mu = \lambda\left[1+(1+\beta)^{-r}\right]^{-1} + \beta$

Varianza $\sigma^2 = \lambda\left[1+(r+1)\beta\right]$

Coeficiente de simetría $\gamma = \left(\sigma^2\right)^{-3/2}\left[3\sigma^2 - 2\mu + \left(\dfrac{r+2}{r+1}\right)\dfrac{\left(\sigma^2-\mu\right)^2}{\mu}\right]$

La función $(f) = r+2/r+1$ se puede representar gráficamente

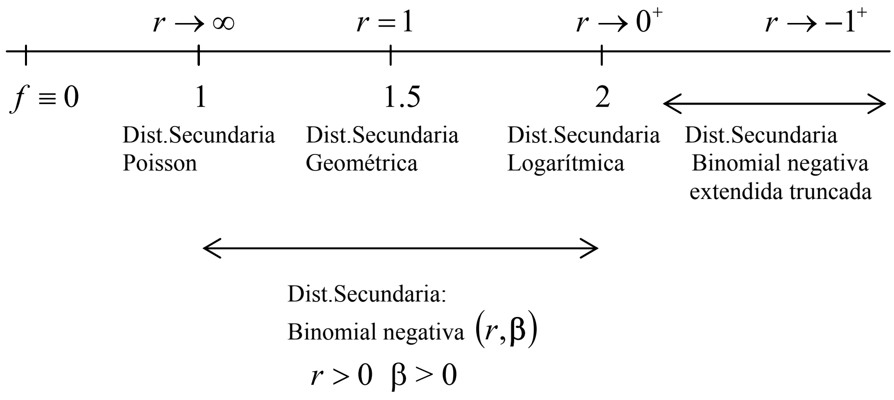


Gráfico 2

La distribución de Poisson compuesta, como acabamos de ver, se denomina Neyman Tipo A (Secundaria :Poisson); Poisson-Pascal (secundaria : Binomial negativa $r>0$); Polya-Aeppli (Secundaria: Geométrica); Binomial negativa (Secundaria: Logarítmica): Poisson-Pascal generalizada (Secundaria: Binomial negativa extendida y truncada): Poisson ponderada por la distribución Inversa Gaussiana (Secundaria: B.N.E.T. con r = -0,5).

Además de los casos anteriores, también hemos considerado la distribución Poisson-Binomial, en la que la función f es ahora $f = m-2/m-1$ tal que $0<f<1$ (m=número de variables sumandos de la Binomial). Recordemos que para $m=2 \Rightarrow f=0$ la distribución de Poisson compuesta se llama de Hermite y para

$m \to \infty \Rightarrow f \to 1^-$, $mq = \lambda_2$, la distribución compuesta vuelve a resultar la distribución Neyman Tipo A.

Es decir, podemos incluir esta nueva función $f = m - 2/m - 1$ en el gráfico 2 correspondiendo al intervalo (0,1), en el que la distribución secundaria es la binomial.

Conclusión

La modelización de la variable número de siniestros como distribución compuesta permite ampliar notablemente las posibilidades de obtener un buen ajuste a esta variable de tipo discreto.

Por su papel relevante en la práctica actuarial nosotros nos hemos referido a las distribuciones de Poisson compuestas.

En efecto, numerosos estudios empíricos han comprobado que si la distribución primaria es del modelo Poisson, el ajuste suele dar buenos resultados en el test de la X^2 de Pearson siempre que la distribución secundaria se haya elegido convenientemente.

Además, los modelos de probabilidad que con mayor frecuencia aplica el actuario en la distribución del número de siniestros, es decir Poisson simple, Poisson ponderado por la Gamma de dos parámetros (Binomial negativa) y Poisson ponderado por la Inversa Gaussiana, son todos ellos casos particulares de las distribuciones de Poisson compuestas. Respectivamente, las distribuciones secundarias son la Binomial con $m = 1$; la logarítmica, y la Binomial negativa extendida y truncada con $r = -0.5$, como hemos estudiado anteriormente.

2. ESTIMACIÓN DEL RECARGO TÉCNICO O DE SEGURIDAD

El artículo 77 del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados - Normas generales sobre Bases Técnicas - establece que el Recargo de seguridad se destinará a cubrir las desviaciones aleatorias desfavorables de la siniestralidad esperada, y deberá calcularse sobre la prima pura. Se determinará, de acuerdo con las características de la información estadística utilizada, atendiendo al tipo, composición y tamaño de la cartera, al patrimonio propio no comprometido y al volumen de cesiones al reaseguro, así como al período que se haya considerado para el planteamiento de la solvencia, que no podrá ser inferior a tres años, debiendo especificarse la probabilidad de insolvencia que, en relación con dicho periodo, se haya tenido en cuenta.

A su vez, el Artículo 45 del citado Reglamento - Provisión de Estabilización - dispone que esta Provisión deberá dotarse en cada ejercicio por el importe del recargo de seguridad incluido en las primas devengadas, con el límite mínimo previsto en las Bases Técnicas.

A este respecto, el riesgo de empresa en las entidades aseguradoras lo podemos clasificar en tres niveles[8]:

Riesgo Técnico o derivado de las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad con respecto a su valor medio o esperado.

Riesgo de Gestión, incluido el inherente a la gestión de inversiones de los activos (fluctuaciones en las valoraciones de los activos, etc).

Riesgo de mercado o derivado del ambiente (legal, económico, social) en que la empresa desarrolla su actividad.

El recargo de seguridad (λ) es, junto a las Reservas de solvencia y el Reaseguro, una de las magnitudes o variables de decisión que dispone el Asegurador para hacer frente al Riesgo técnico propio de la actividad aseguradora.

---

[8] Vegas Asensio, J. y Nieto de A., V (1993) "Ob.cit.

Tomando un criterio de decisión basado exclusivamente en la estabilidad o solvencia, es decir, sin dar entrada a órdenes de preferencia, funciones de demanda u oferta, etc, el cálculo de λ lo podemos plantear:

1. Como fracción de un parámetro que mide el riesgo asumido por el asegurador.

2. Según el modelo estocástico de la teoría del riesgo (individual o colectivo).

1. La expresión general en este caso es:

$$P_r = E(X) + \lambda R(X)$$

P_r = Prima recargada

$R(X)$= Parámetro que mide el riesgo del asegurador

$\lambda R(X)$= Recargo de seguridad explícito $(\lambda \in R^+)$

Los principales casos particulares son los siguientes:

$R(X) = \sigma^2(X)$ Varianza de la siniestralidad total correspondiente al periodo de tiempo a que se refiere la prima pura o valor medio E(X).

$R(X) = \sigma(X)$ Desviación típica de la siniestralidad total.

$R(X) = \sigma^2{}_+(X)$ Semivarianza de la siniestralidad total

$$\sigma^2{}_+(X) = \int_E^\infty (X - E)^2 \, dF(X) \quad \text{donde } E = E(X)$$

Lógicamente el valor de λ dependerá del parámetro utilizado en la medición del riesgo del asegurador.

El tercer parámetro tiene la ventaja que sólo refleja las desviaciones en la siniestralidad superior a la media, frente a la varianza y la desviación típica que miden desviaciones tanto positivas como negativas.

2. Aplicación de la teoría del riesgo colectivo:

Vamos a emplear las siguientes notaciones:

- Distribución de la siniestralidad total

$$F(x,\tau) = \sum P_n(\tau) V^{n(*)}(x)$$

donde $P_n(\tau)$ es la distribución del número de siniestros y τ la media de esta distribución en el tiempo físico $[0,t)$. $V^{n(*)}(x)$ es la convolución n-síma de $V(x)$ o distribución de la cuantía de un siniestro. Es decir, $V^{n(*)}(x) = \int_0^x V^{n-1(*)}(x-z)\, d\, V(z)$ y $V^{1(*)}(x) = V(x)$

Los casos más importantes son, como es bien sabido,

$$P_n(\tau) = P[N(\tau) = n] = \frac{e^{-\tau}\tau^n}{n!} \qquad \text{Poisson}$$

$$P_n(\tau) = P[N(\tau) = n] = \binom{-h}{n}\left(\frac{h}{\tau+h}\right)^h \left(-\frac{\tau}{\tau+h}\right)^n \quad \text{Binomial negativa}$$

En comparación con la notación empleada en el primer epígrafe de este artículo

$$\tau = r\beta \quad \text{y} \quad h = 1/\beta$$

La función generatriz de momentos de la distribución compuesta $F(x,\tau)$ es $g_{x(t)}(z) = g_n[g_x(z)]$

y su media

$$P=\int_0^\infty x dF(x,\tau)=\tau C_1 \qquad (C_1 \equiv \text{Coste medio del siniestro})$$

Para determinar el recargo técnico o de seguridad podemos aplicar los siguientes criterios:

A) Distribución de la siniestralidad total, neta de reaseguro, en un periodo fijo de tres años como mínimo

Empleando la notación que acabamos de considerar, F(x,τ) es la función de distribución de la siniestralidad total (neta de Reaseguro) correspondiendo a un periodo fijo de duración al menos de tres años.

La función generatriz resulta

$$g_{x(\tau)}=g_n\left[g_x(z)\right]=\begin{cases} e^{\tau[g_x(z)-1]} & \text{; Distribución de Poisson del nº de siniestros} \\ \left[1-\frac{\tau}{h}\left(g_x(z)-1\right)\right]^{-h} & \text{; Dist.Binomial negativa del nº de siniestros} \end{cases}$$

Desarrollando en serie se obtienen los parámetros

Media $P\equiv\tau c_1$ (Poisson) ; τc_1 (binomial negativa)

Varianza $\equiv\tau c_2$ (Poisson) ; $\tau c_2+\frac{(\tau c_1)^2}{h}$ (binomial negativa)

Momento de tercer orden (M_3) $\equiv\tau c_3$ (Poisson) ; $\tau c_3+3\frac{\tau^2 c_1 c_2}{h}+2\frac{(\tau c_1)^3}{h^2}$ (binomial negativa)

Aproximaciones de la función de distribución de la siniestralidad total.

El problema de la obtención de aproximaciones para $F(x,\tau)$ fue ya investigado por Lundberg a principios de siglo, llegando a obtener la aproximación normal para $\tau \rightarrow \infty$ así como otras aproximaciones cuando τ no tiende a infinito.

Esta teoría de las aproximaciones asintóticas ha sido desarrollada, entre otros, por Cramer, Esscher, Böhman, Pentikainen, Beard y Pesonen, pudiendo considerarse como principales métodos de aproximación de la distribución del daño total los siguientes:

Aproximación normal

En primer lugar si denominamos:

$$P = E\left\lfloor X_{(\tau)} = \tau c_1 \right\rfloor \qquad \text{(prima pura)}$$

$$\sigma^2 = E\left\{X_{(\tau)} - \tau c_1\right\}^2 \qquad \text{(varianza)}$$

$$c_1 = \int_0^\infty x dV(x)$$

resulta que, operando en unidades de coste medio del siniestro, es decir, $c_1 = 1$, entonces $P = \tau$.

La variable tipificada υ es

$$\upsilon = \frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} \; \frac{X_{(\tau)} - \tau}{\sigma}$$

de donde,

Función de distribución = $F_0(\upsilon,\tau) = F(\tau + \upsilon\sigma, \tau)$

Función de densidad = $f_0(\upsilon,\tau) = F_0'(\upsilon,\tau)$

cumpliéndose que $X_{(\tau)} = \sigma\upsilon + \tau$

El desarrollo de Edgeworth de $f_0(\upsilon,\tau)$ es

$$f_0(\upsilon,\tau)=\varphi(\upsilon)-\frac{M_3}{3!\sigma^3}\varphi^{III}(\upsilon)+\frac{1}{4!}\left(\frac{M_4}{\sigma^4}-3\right)\varphi^{IV}(\upsilon)+...$$

Por lo que si se toma el primer término del desarrollo,

$$\varphi(\upsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\upsilon/2}$$

se tiene la aproximación normal.

Aproximación Np (Normal Power)

En el desarrollo de Edgeworth aparecen las derivadas sucesivas de $\varphi(\upsilon)$ que dan lugar a que para $\upsilon\to\infty$, sea una serie divergente. No obstante para valores comprendidos en un entorno de la media el desarrollo proporciona aproximaciones aceptables. Pero desde el punto de vista de la teoría de riesgo esto no es suficiente, ya que se necesitan cálculos para casos en que la desviación supere dos o tres veces la desviación típica.

En este sentido el método NP parte de la variable normal tipificada

$$\upsilon=\frac{X(\tau)-P}{\sigma}$$

por lo que la siniestralidad total será

$$X(\tau)=\tau c_1+\upsilon\sqrt{\tau}c_2$$

Esta aproximación funcional consiste en aplicar la expresión siguiente para $\upsilon\geq 1$, es decir, a efectos del cálculo de la probabilidad de ruina o del recargo de seguridad[9]

[9] (9) Ver, por ejemplo, Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba U 1993. Ob cit.

$$\frac{X(\tau)-P}{\sigma} \cong \upsilon + \frac{\gamma}{6}\left(\upsilon^2 - 1\right) + \frac{\gamma_2}{24}\left(\upsilon^3 - 3\upsilon\right) - \frac{\gamma^2}{36}\left(2\upsilon^3 - 5\upsilon\right)$$

Como se puede observar la aproximación normal consiste en considerar solo el primer término de este desarrollo, mientras que la aproximación Normal Power consiste, generalmente, en tomar los dos primeros sumandos, es decir

$$\frac{X(\tau)-P}{\sigma} \cong \upsilon + \frac{\gamma}{6}\left(\upsilon^2 - 1\right) \qquad ; \qquad \gamma = \frac{M_3}{\sigma^3} \quad \text{(coef. de simetría)}$$

Aproximación Gamma

A partir de la función de distribución gamma

$$\Gamma(x,\alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu$$

vamos a hacer el siguiente cambio de variable

$$\Gamma(ax+b;\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{ax+b} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu$$

la cual tiene tres parámetros, lo que permite mejorar la aproximación de la función del daño total.

Teniendo en cuenta la variable tipificada,

$$\frac{X_{(\tau)}-P}{\sigma} = \upsilon \,; P = \tau c_1 \,; \sigma = \sqrt{\tau c_2} \quad \text{(Poisson)}$$

$$F(x,\tau) = \varphi(\upsilon) = \int_0^{av+b} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{av+b} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} d\mu$$

Esta aproximación funcional supone aplicar la expresión[10]

$$F(x,\tau)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x(\tau)-\tau c_1}{\sqrt{\tau c_2}}\sqrt{\alpha}+\alpha} e^{-y}y^{\alpha-1}dy$$

siendo P=τc_1 la media : $\sqrt{\tau c_2}$ = σ la desviación típica y γ el coeficiente de simetría ($\alpha = 4/\gamma^2$)

Este método de aproximación tiene la propiedad de que cuando el tamaño de la cartera crece y el número de siniestros sigue el modelo de la binomial negativa, la correspondiente variable $X(\tau)$ de Poisson ponderada compuesta tiende a la función gamma, lo que justifica teóricamente los buenos resultados empíricos puestos de manifiesto por algunos autores, como Seal, con esta aproximación.

Determinación del recargo de seguridad

Una vez aproximada la función de distribución de la siniestralidad total en el periodo considerado de al menos tres años, (neta de reaseguro), se calcula el recargo técnico o de seguridad λ de forma que se verifique la ecuación

$$\varepsilon = 1 - F\left[(1+\lambda)P + S_0;\tau\right]$$

donde

ε= probabilidad de ruina en el horizonte temporal considerado.

S_0=Reservas de solvencia (básicamente capitales propios y provisiones técnicas de estabilización) imputables a la cartera de pólizas cuya siniestralidad total es $X(\tau)$.

[10] Ver, por ejemplo, Latorre LL.,Luis (1992) “Teoría del Riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora” Mapfre Estudios

Como ejemplo numérico vamos a suponer una cartera de R.Civil automóviles que en un periodo de tres años tiene los siguientes parámetros

$\tau = 45.000$ siniestros (15.000 de media anual)

nº total de pólizas en el trienio = 75.000

nº medio de siniestros por póliza en 3 años = 0.60 stros/pól.

Coste medio del siniestro (en miles de pesetas) = 231 (M)

Desviación típica del coste del siniestro = 1.160 (M)

Varianza del número de siniestros en el trienio considerado = 0.73

Supuesto el modelo de la Binomial Negativa en la distribución trianual del número de siniestros, el coeficiente de heterogeneidad (h) resulta

$$h = \frac{0.60}{0.73 - 0.60} \simeq 4.6$$

El volumen de primas (P) resulta

P= (45.000) (231) = 10.395 Millones pts en el horizonte temporal considerado.

Los dos primeros momentos ordinarios de la distribución del coste del siniestros quedan

$c_1 = 231(M)$

$c_2 = [1.160(M)]^2 + [231(M)]^2 = 1.398.961(10^6)$

Asumiendo la hipótesis que el coeficiente de simetría de la distribución de la siniestralidad total en 3 años es γ=0.8, los principales momentos de esta distribución son:

Media P = 10.395 Mill, pts.

Varianza= ($\tau c_2 + \frac{(\tau c_1)^2}{h}$ =(45.000)(1.398.961)(10^6)+$\frac{P^2}{4.6}$

D. Típica = $\sigma = \sqrt{\tau c_2 + \frac{(\tau c_1)^2}{h}}$ = 4.853 Mill pts

Coef. de simetría $\gamma = \frac{M_3}{\sigma^3} = 0.8$

En consecuencia, si aplicamos la aproximación Normal Power, fijada una probabilidad de ruina (ε) por ejemplo ε= 2.5%, lo que equivale a υ= 1.96, la expresión resultante como hemos visto anteriormente viene dada por

$$\frac{X(\tau) - P}{\sigma} = 1.96 + \frac{0.8}{6}\left[(1.96)^2 - 1\right]$$

$$\frac{X(\tau) - P}{\sigma} = 2.338$$

$$X_{(\tau)} - P = 11.346 \quad \text{Mill. pts.}$$

En consecuencia, la ecuación

$$\varepsilon = 1 - F\left[(1+\lambda)P + S_{0;\tau}\right]$$

con ε= 2.5%

resulta

(1+λ) P + S_0 = 11.346 + 10.395 = 21.741 Mill. pts

Si suponemos que el Margen de solvencia y las provisiones técnicas de estabilización imputables a este seguro son, por ejemplo, S_0 = 11.000 Mill. el recargo técnico o de seguridad es λ= 3.33 % s/primas de riesgo.

En la práctica actuarial se podría añadir a este porcentaje el recargo para cubrir el error de muestreo, teniendo en cuenta que en este ejemplo el tamaño de la muestra son 45.000 siniestros. Aproximadamente se obtiene un recargo técnico complementario del 0.5% s/primas de riesgo.

B) Función de ruina (horizonte infinito).

Partiendo de la desigualdad de Lundberg

$$\varphi(S_0) = \varepsilon \leq e^{-RS_0}$$

se calcula R que se sustituye en[11]

$$E\left[e^{-R\left[(1+\lambda)\tau c_1 - X(\tau)\right]}\right] = e^{-R(1+\lambda)\tau c_1} E\left[e^{RX(\tau)}\right] = 1 \qquad (1)$$

$$e^{-R(1+\lambda)\tau c_1} = \int_0^{\infty} e^{RX} dF(x,\tau) = \varphi_n\left[\varphi_x(R)\right] = e^{\tau[\varphi(R)-1]} \qquad \text{(Poisson)}$$

o bien

$$\left[1 - \frac{\tau}{h}\left(\varphi_x(R) - 1\right)\right]^{-h} \qquad \text{(Binomial negativa)}$$

es decir,

[11] Ver, por ejemplo, Vegas Asensio J. y Nieto de Alba, U. Ob. Cit págs 305 y ssg.

$$\int_0^{\infty} e^{RX}\, dV(x) = \begin{cases} 1+(1+\lambda)RC_1 & \text{(Poisson)} \\ 1+\dfrac{1-e^{(1+\lambda)RC_1\tau/h}}{\tau/h} & \text{(Binomial negativa)} \end{cases}$$

Con objeto de obtener fórmulas aproximadas del recargo de seguridad de (1) se obtiene (tomando la cota superior de la probabilidad de ruina),

$$R = \frac{1}{S_0}\left[-\boldsymbol{log}\,\psi(S_0)\right] = \frac{1}{S_0}\left[-\boldsymbol{log}\,\varepsilon\right]$$

A su vez de la ecuación de condición (1), resulta

$$E\left[e^{RX(\tau)}\right] = e^{(1+\lambda)RP} = \varphi_n\left[\varphi_x(R)\right] \qquad \text{con } P = \tau C_1$$

En la que φ_n es la función generatriz de la distribución del número de siniestros y $\varphi_x(R)$ la función generatriz de la distribución de la cuantía del siniestro.

Considerando el modelo de la binomial negativa para la primera variante (número de siniestros), donde h es el coeficiente de heterogeneidad o contagio de la cartera, resulta:

$$e^{(1+\lambda)RP} = \left[1-\frac{\tau}{h}\left(\varphi_x(R)-1\right)\right]^{-h}$$

tomando logaritmos se puede poner:

$$\boldsymbol{log}\left[1-\frac{\tau}{h}\left(\varphi_x(R)-1\right)\right] = -\frac{\tau}{h}\left(\varphi_x(R)-1\right) - \frac{\tau^2}{2h^2}\left(\varphi_x(R)-1\right)^2 - \frac{r^3}{3h^3}\left(\varphi_x(R)-1\right)^3 - \boldsymbol{\ldots}$$

es decir,

$$R(1+\lambda)\frac{\tau}{h}=\frac{\tau}{h}(\varphi_x(R)-1)+\frac{\tau^2}{2h^2}(\varphi_x(R)-1)^2+\frac{\tau^3}{3h^3}(\varphi_x(R)-1)^3+\dots$$

A su vez el desarrollo en serie de potencias de la función generatriz del coste del siniestro es:

$$\varphi_x(R)=\int_0^\infty e^{RX}dV(x)=1+C_1R+C_2\frac{R^2}{2}+C_3\frac{R^3}{3!}+\dots$$

que sustituida en la expresión anterior, y operando en unidades de coste medio nos da como resultado.

$$R(1+\lambda)\frac{\tau}{h}=\frac{\tau}{h}\left[R+C_2\frac{R^2}{2}+C_3\frac{R^3}{3!}+\dots\right]+\frac{\tau^2}{2h^2}\left[R+C_2\frac{R^2}{2}+\dots\right]+\dots$$

La aproximación lineal de este desarrollo nos permite obtener,

$$R(1+\lambda)\simeq R+C_2\frac{R^2}{2}+\frac{\tau}{2h}R^2$$

$$(1+\lambda)\simeq 1+\frac{R}{2}\left(C_2+\frac{\tau}{h}\right) \qquad ; \qquad \lambda\simeq\frac{R}{2}\left(C_2+\frac{\tau}{h}\right)$$

y, teniendo en cuenta la desigualdad de Lundberg, resulta

$$\lambda\simeq\frac{1}{2S_0}\left(1+\sigma^2+\frac{\tau}{h}\right)(-\log\varepsilon) \qquad (2)$$

fórmula en la que σ^2 es la varianza de la cuantía del siniestro expresada en unidades de coste medio.

La ecuación (2) en unidades monetarias es :

$$\lambda\simeq\frac{1}{2S_0}\left[C_1+\frac{\sigma^2(x)}{C_1}+\frac{P}{h}\right](-\log\varepsilon)$$

en la que $\sigma^2_{(x)}$ es la varianza de la distribución del coste del siniestro.

En conclusión, la aproximación lineal a partir de la función de ruina en la hipótesis del modelo de la binomial negativa, nos permite expresar el recargo técnico λ como resultante de agregar tres elementos:

$$\lambda \simeq p_1(S_0; C_1; \varepsilon) + p_2(S_0; C_1; \sigma^2(x); \varepsilon) + p_3(S_0; h; \varepsilon)P$$

Se observa que este recargo, llamado también "técnico" para distinguirlo de los recargos económicos - o de gestión- está influido por un componente que es función de $\sigma^2(x)$ (el cual mide la dispersión de la cuantía de los siniestros), y por otro componente que es función de h (parámetro que mide la dispersión, en sentido inverso, del número de siniestros), de forma que p_2 es creciente con $\sigma^2(x)$ y p_3 decreciente con h. En cuanto al primer sumando, p_1 ,significa el nivel mínimo del recargo de seguridad.

A partir de la ecuación (2) se puede obtener una expresión aproximada de la probabilidad de ruina en un intervalo temporal infinito. En efecto, de (2), operando en unidades monetarias, resulta.

$$\boldsymbol{log}\, \varepsilon \simeq \frac{-2\lambda S_0}{C_1 + \dfrac{\sigma^2(x)}{C_1} + \dfrac{P}{h}}$$

$$\varepsilon \simeq e^{-\frac{2\lambda C_1}{C_1^2 + \sigma^2(x) + \frac{\tau}{h} C_1^2} \cdot S_0} = e^{-\frac{2\lambda C_1}{C_2 + \frac{\tau}{h} C_1^2} \cdot S_0}$$

Si $h \to \infty$ (distribución de Poisson del número de siniestros), la función de ruina es

$$\varepsilon \simeq e^{-\frac{2\lambda C_1}{C_2} S_0}$$

es decir ε disminuye al aumentar λ y S_0.

Los resultados anteriores tienen validez para el total de una cartera, o bien para una cartera parcial limitada a un ramo, o a una determinada modalidad de seguro.
Pero teniendo en cuenta que en la práctica actuarial se suele disponer de información de las carteras parciales se presenta el problema de fijar la distribución de la totalidad a partir de las correspondientes distribuciones de las carteras parciales.

Si asumimos la hipótesis de que la información proviene de Carteras parciales estocásticamente independientes podemos poner:

Cartera parcial	Distribuciones
C_1	$F_1(x\tau_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau_1}\tau_1^n}{n!}V_1^{n(*)}(x)$
C_2	$F_2(x\tau_2)=\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{-\tau_2}\tau_2^n}{n!}V_2^{n(*)}(x)$
C_3	$F_3(x\tau_3)=\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{-\tau_3}\tau_3^n}{n!}V_3^{n(*)}(x)$
...	... ...
C_k	$F_k(x\tau_k)=\sum_{0}^{\infty}\frac{e^{-\tau_k}\tau_k^n}{n!}V_k^{n(*)}(x)$

En este caso la función de distribución de la siniestralidad correspondiente a la cartera total es[12]

$$F(x,\tau)=\sum\frac{e^{-\tau}\tau^n}{n!}V^{n(*)}(x)$$

[12] Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, U. ob. cit. pág.308

siendo $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + ... + \tau_k$

$$V_{(x)} = \frac{\tau_1 V_1(x) + \tau_2 V_2(x) + ... + \tau_k V_k(x)}{\tau_{(1)} + \tau_{(2)} + ... + \tau_{(k)}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\tau_i V_i}{\tau}$$

El inconveniente que surge en la práctica actuarial de aplicar el modelo de la función de ruina (horizonte infinito) en la determinación del recargo de seguridad es que se obtienen valores muy elevados en la mayoría de los casos.

3. Provisión técnica de primas no consumidas

El artículo 30 del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros privados establece que la Provisión de primas no consumidas deberá estar constituida por la fracción de las primas devengadas en el ejercicio que deba imputarse al período comprendido entre la fecha de cierre y el término del período de cobertura.

La provisión de primas no consumidas se calculará póliza a póliza.
La base de cálculo de esta provisión estará constituida por las primas de tarifa devengadas en el ejercicio deducido, en su caso, el recargo de seguridad.

La imputación temporal de la prima se realizará de acuerdo con la distribución temporal de la siniestralidad a lo largo del periodo de cobertura del contrato.

Cuando razonablemente pueda estimarse que la distribución de la siniestralidad es uniforme, la fracción de prima imputable al ejercicio o ejercicios futuros se calculará a prorrata de los días por transcurrir desde la fecha de cierre del ejercicio actual hasta el vencimiento del contrato al que se refiere la prima.

Sin embargo, por ejemplo, el Instituto de Actuarios Canadiense en las recomendaciones sobre el Dictamen financiero de las Compañías de Seguros No Vida, en su apartado 3º - Reservas de primas - dice textualmente que la naturaleza (frecuencia y coste) de los siniestros suele variar según la estación. Como la fracción de prima no consumida tiene una mayor exposición al riesgo en la primera mitad del año siguiente, el actuario debe evaluar el componente estacional (de la siniestralidad y gastos de explotación comprendidos en la prima de tarifa).

El seguimiento de esta recomendación lleva consigo, en un enfoque clásico o determinista, calcular los números índices de variación estacional para aplicarlos a la valoración de la provisión de primas no consumidas.

En efecto, si los citados índices mensuales, obtenidos por cualquiera de los métodos de cálculo generalmente aplicados en el análisis clásico de las series temporales (media aritmética; razones a la media móvil; valoración a la tendencia; método de Shiskin, etc) los denominamos I_1 (enero), I_2 (febrero) ... I_{12} (diciembre) y para simplificar lo que figura a continuación consideramos las primas a mitad de cada mes, y un solo componente de estacionalidad para siniestralidad y gastos, la fórmula de la Provisión de primas no consumidas a 31 de diciembre de un ejercicio resulta

$$\text{Prov.P.no consumidas} = \sum Pe\frac{1}{24}I_1 + \sum P_F\left(\frac{2}{24}I_1 + \frac{1}{24}I_2\right) + \sum P_{MZ}\left(\frac{2}{24}I_1 + \frac{2}{24}I_2 + \frac{1}{24}I_3\right) + \sum P_A\left(\frac{2}{24}I_1 + \frac{2}{24}I_2 + \frac{2}{24}I_3 + \frac{1}{24}I_4\right) + \sum P_{MY}\left(\frac{2}{24}I_1 + \frac{2}{24}I_2 + \frac{2}{24}I_3 + \frac{2}{24}I_4 + \frac{1}{24}I_5\right) + \ldots + \sum P_{NOV}\left(\frac{2}{24}I_1 + \frac{2}{24}I_2 + \frac{2}{24}I_3 + \ldots + \frac{2}{24}I_{10} + \frac{1}{24}I_{11}\right) + \sum P_{DIC}\left(\frac{2}{24}I_1 + \frac{2}{24}I_2 + \ldots + \frac{2}{24}I_{11} + \frac{1}{24}I_{12}\right) \quad (1)$$

donde $\sum P_e ; \sum P_F ; \sum P_{MZ}$ ... son las primas de tarifa devengadas en cada uno de los meses del ejercicio de cálculo de la provisión (enero, febrero, marzo...).

Caso Práctico

Sean las siguientes cifras de siniestralidad mensual de un determinado Ramo o modalidad de seguros (en unidades monetarias)

Los índices estacionales están calculados por el método de la media aritmética.

Mes/año	1	2	3	Total	Medias Totales
En.	3.165	3.194	3.210	9.569	3.190
Feb.	3.081	3.205	3.098	9.384	3.128
Mz	3.388	3.512	3.487	10.387	3.462
Ab	3.401	3.475	3.513	10.389	3.463
My	3.450	3.527	3.561	10.538	3.513
Ju	3.511	3.496	3.644	10.651	3.550
Jl	3.722	3.730	3.754	11.206	3.735
Ag	2.033	2.114	2.139	6.286	2.095
Sep	3.480	3.462	3.519	10.461	3.487
Oc.	3.511	3.540	3.601	10.652	3.551
Nov	3.516	3.522	3.665	10.703	3.568
Dic	3.710	3.695	3.717	11.122	3.707
Total	39.968	40.472	40.908		
X(t)	3.331	3.373	3.409		

$X(t)$	$t' = t - 2$	$X(t)^{*} t'$	t^{12}
3.331	-1	-3.331	1
3.373	0	0	0
3.409	1	3.409	1
10.113	0	78	2

Coeficiente angular de la tendencia b=39

	Medias corregidas	Indice de la Variación Estación
En	3.190	95

Feb	-b/12=3.125	93
Mz	-2b/12=3.456	103
Ab	-3b/12=3.453	103
My	-4b/12=3.500	104
Ju	-5b/12=3.534	105
Jl	-6b/12=3.715	111
Ag	-7b/12=2.072	62
Sep	-8b/12=3.461	103
Oct	-9b/12=3.522	105
Nov	-10b/12=3.535	106
Dic	-11b/12=3.671	109
Total	40.234	
Media	3.353	

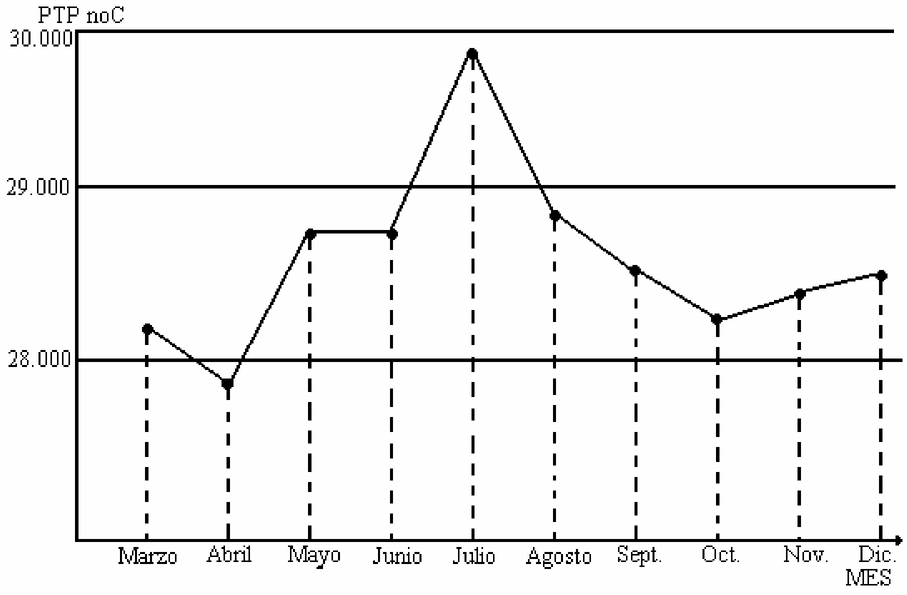
Mes	Primas de tarifa devengadas (en unidades monetarias)
Enero	4.580
Febrero	4.895
Marzo	5.632
Abril	5.238
Mayo	5.041
Junio	5.845
Julio	7.049
Agosto	2.882
Septiembre	3.348
Octubre	5.004
Noviembre	4.429
Diciembre	4.623
$\sum P''$	58.566

De acuerdo con (1) la Provisión técnica de primas no consumidas a cierre del ejercicio queda

$$4.850\left(\frac{1}{24}0.95\right)+4.895\left(\frac{2}{24}0.95+\frac{1}{24}0.93\right)+\ldots+4.623\left(\frac{2}{24}0.95+\ldots+\frac{1}{24}1.09\right)=$$

$$=\ 28.200\,u.m.$$

Es llamativa la evolución mensual del importe de esta Provisión calculada con los mismos criterios que al cierre del ejercicio, como se pone de manifiesto en el siguiente gráfico.



BIBLIOGRAFÍA

Dayking C.D., Pentikainen, T. y Pesonen, M. (1994) “Practical Risk Theory for actuaries”. Chapman & Hall. London.

Latorre LL, Luis (1992) “Teoría del riesgo y sus aplicaciones a la empresa aseguradora”. Mapfre Estudios.

Panjer, H. y Willmot, G. (1992) “Insurance risk models”. Society of Actuaries. U.S.A.

Panjer, H. y Willmot, G. (1983) “Compound Poisson models in actuarial risk theory” Journal of Econometrics.

Vegas Asensio, J. y Nieto de Alba, V. (1993) “Matemática Actuarial” Mapfre Estudios.